2023年ガロア祭　懸賞問題

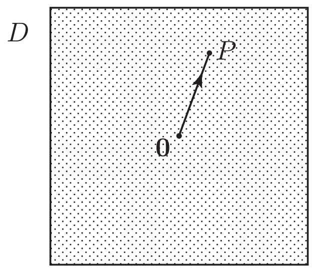
提出先: 数学事務室（理学部３号館１階）
締切: ６月９日（金）17:00

以下の問題を好きなだけ解いて提出してください（もちろん１問だけでも歓迎します）．すぐれた解答には豪華賞品が出ます．優秀な解答者は６月16日（金）のガロア祭にて発表されます．

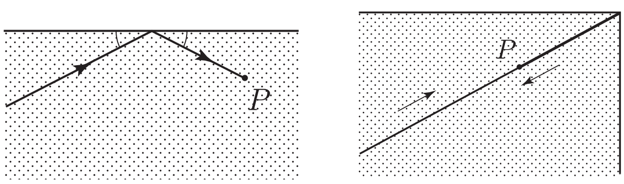
レポートには表紙をつけて，名前・所属・学籍番号・メールアドレスを記入してください．

問題 1 (渡邉忠之). D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ とする。時刻 0 で原点 $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ からある方向に向かって出発した動点 P が、以下の規則 (i), (ii) に従って D 内を動き、a 秒後に点 A に到達するとき、$0 \leq t \leq a$ で P が動いてできる曲線 $\gamma(t)$ を「A に到る長さ a の軌道」と呼ぶことにする。

(i) P は境界 ∂D にぶつかるまで秒速 1 で等速直線運動をし続ける。



(ii) 境界 ∂D にぶつかったら、入射角と反射角が等しくなるように反射し、引き続き (i) の等速直線運動をする。ただし、∂D の角 $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ のいずれかにぶつかったときは、入射したのと同じ直線上を入射と逆の方向に反射し、引き続き (i) の等速直線運動をする。いずれの場合も反射には時間を要さないとする。



実数 $t > 0$ に対して、

$$\Theta(t) = |\{A \in D \mid A \text{ に到る長さ } t \text{ の軌道が少なくとも 2 個ある }\}|$$

と定める ($|\cdot|$ は元の個数を表す)。次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \sup\left\{\frac{\Theta(\tau)}{\tau^2} \,\middle|\, \tau \geq t\right\} = 4\pi$ を示せ。

(2) $\dfrac{\Theta(t)}{t^2}$ は $t \to \infty$ で 4π に収束するかどうか考察せよ。

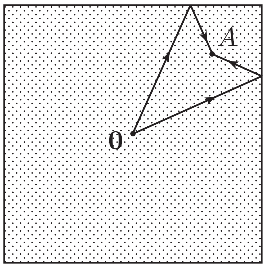


図 1: A に到る長さ $\dfrac{3}{4}$ の軌道が 2 個である点 A の例

問題 2 (市野篤史). f を $[0,1]^n$ 上の実数値連続関数とする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し、自然数 m, アフィン写像 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 線形写像 $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ で

$$\sup_{x\in[0,1]^n} |f(x) - (h\circ\phi\circ g)(x)| \le \varepsilon$$

をみたすものが存在することを示せ。ただし $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は

$$\phi(x_1,\dots,x_m) = (\max(x_1,0),\dots,\max(x_m,0))$$

で定まる写像とする。

問題 3 (窪田陽介). ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を，長さを指定した区間（開区間，閉区間，半開区間のいずれか）の族によって，交わらないように覆いつくす，すなわち交わらない合併によって表すことを考える．例えば，$\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (0,1)$ と置くと，$\mathbb{R}^2$ は長さ 1 の半開区間によって

$$\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}} [\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_1), \qquad \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} [\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_2),$$

のように被覆される（ここでは，平面上の点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して，$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \mid t \in [0,1)\}$ という記法を用いた）．以下の問に答えよ．

(1) 長さ 1 の半開区間によって，$\mathbb{R}^2$ から勝手な n 点を除いた補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_n\}$ を被覆せよ．

(2) 異なる長さ s, t を持つ二種類の開区間を用いて，平面 $\mathbb{R}^2$ を被覆せよ．

(3) この種の問題を自由に一つ考え，それを解け.（なるべく非自明になることを目指してください.）

一例としては，次のような問題が考えられる．

- 一種類の長さの開区間で $\mathbb{R}^2$ は被覆できるか？
- 閉集合ならばどうか？
- 平面 $\mathbb{R}^2$ ではなく 3 次元以上のユークリッド空間を考えるとどうか？