2022年度ガロア祭問題

提出締切：6月10日（金曜）の17時.
提出先：理学部3号館・数学事務室

すぐれた解答には賞品を出す予定です．6月17日(金)のガロア祭にて優秀な解答者を発表します．（賞品を出すのは京都大学理学部の1，2回生の方に限らせていただきます.）もちろん一問だけでもよいので，ふるってご応募ください.

レポートには表紙を付けて，名前・所属・学籍番号・メールアドレスを記入してください.

問題 1 (田中亮吉)**.** ある d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ への区間 $[0,1]$ からの連続写像 $X:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ であって次を満たすものを構成してください: ある定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して任意の $s, t \in [0,1]$ について

$$c_1|s-t|^{\frac{1}{2}} \leq \|X(s)-X(t)\| \leq c_2|s-t|^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^d$ のユークリッド距離とします．また次元 d の値は問いません.

問題 2 (田中亮吉)**.** 2つの元からなる体 $F_2=\{0,1 \mod 2\}$ を成分に持つ n 次正方行列で可逆なもの M_n を考えます．ここで n は2以上の整数とします．行列 M_n の第 i 行と第 j 行を選び $(i\neq j, i,j=1,\ldots,n)$, 第 j 行を第 i 行に加える操作を i,j のペアについて何回か繰り返す (ペアは重複して現れても構いません) ことで M_n を単位行列にすることができます. 一般に任意の可逆な行列 M_n が与えられたとき, この操作をたかだか何ステップ施せば単位行列にできるでしょうか? また最もステップ数が必要な場合それはどれくらいになるでしょうか? これらのステップ数を n についての関数として与えてください.

問題 3 (塚本真輝)**.** x は実数を動く変数とする．ワイエルシュトラスは次の関数を考えた：

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\left(2^n x\right).$$

この関数は連続であるが，**いたるところで微分できない**関数になる.

一方で，リーマンは次の関数を考えた：

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(n^2 x\right).$$

この関数も連続である．リーマンは「$R(x)$ はいたるところで微分できない関数になる」と主張したそうであるが，これは間違いであり，

$$x = \frac{p\pi}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は奇数})$$

の形の点において $R(x)$ は微分可能で

$$R'\left(\frac{p\pi}{q}\right) = -\frac{1}{2}$$

となる．（この形以外の点では $R(x)$ は微分不可能．）

さて，では皆さんもリーマンやワイエルシュトラスのように面白い関数を作ってください．すなわち，「特定の興味深い集合の上でだけ微分可能になる関数」や，「特定の興味深い集合の上での微分が面白い値になる関数」を構成してください．

このままでは問題が難しすぎるようであれば，適当に自分なりに問題を改変して解いてくださっても結構です．