２０１８年ガロア祭懸賞問題

提出先は数学事務室（理学部３号館１階），締め切りは６月７日（木曜日）１７時です．すぐれた解答には豪華賞品が出ます．６月１５日（金曜日）のガロア祭会場にて優秀な解答者を発表します．もちろん一問だけでも良いので奮ってご応募ください．

問題１（伊藤哲也）

A を $0,1$ を含むような、足し算、引き算について閉じているような実数の部分集合とする。つまり、a,b が A に入っているような実数であれば、$a+b$, $a-b$ は両方とも A に含まれるとする(整数全体 $\mathbb{Z}$ や有理数全体 $\mathbb{Q}$ はこのような性質を持つような部分集合の例である)。

次の条件を満たすような A の元たちの間に定義された関係 $\ll$ を (A 上定義された)『一般化された大小関係』と呼ぶことにしよう。

- $0 \ll 1$
- 全ての異なる $a,b \in A$ について、$a \ll b$ または $b \ll a$ のどちらか一方が常に成り立つ
- $a,b,c \in A$ について $a \ll b$, $b \ll c$ ならば $a \ll c$ が成り立つ
- $a,b,c \in A$ について $a \ll b$ が成り立っているならば $a+c \ll b+c$ が成り立つ

通常の大小関係 $<$ は上に挙げた性質をすべて満たしていることに注意しよう。

問１： うまく部分集合 A をとり、通常の大小関係とは異なるような A 上定義された『一般化された大小関係』の例を構成せよ。（もちろん実数全体で定義された『一般化された大小関係』の例が作れればそれに越したことはない）

問２： 通常の大小関係 $<$ は、さらにアルキメデスの原理

全ての実数 $0 < a, b$ についてある自然数 n が存在し $b < na (= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n})$ となる

が成り立っていた。そこで、さらに『一般化された大小関係』についても同様の性質

全ての A に入る実数 $0 \ll a, b$ についてある自然数 n が存在し $b \ll na$ となる

を考えよう。うまく部分集合 A をとることで、この性質を満たすような『一般化された大小関係』が作れるだろうか？。問１同様に、存在する場合は具体例を挙げ、存在しない場合は存在しないことを示せ。

問題２（佐藤康彦）

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $f^{-1}((-\infty, a))$ が開集合となるとき, 関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は上半連続であるという.

一様有界な上半連続関数の列 $f_n,\, g_n : [0,1] \to \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n g_n(x)|\, dx = 0,$$

を満たすと仮定する. この時, 次の条件を満たす連続関数の列 $\widetilde{f}_n, \widetilde{g}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ が存在する事を示しなさい.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| f_n(x) - \widetilde{f}_n(x) \right| dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |g_n(x) - \widetilde{g}_n(x)|\, dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \left| \widetilde{f}_n \cdot \widetilde{g}_n(x) \right| = 0.$$

問題３（山名俊介）

$a(n)$ は n の素因子で最大のものを表す。このとき

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$$

が収束することを証明せよ.

問題４（金沢篤）

1. 数学教室の学生 16 人が麻雀大会を開催したい。4 人ずつの 4 グループで麻雀することを 5 回繰り返す。総当たりになる組み合わせを作ることは可能か？但し総当たりとは各人が他の全員とちょうど 1 回ずつ対戦することをいう。
2. もっと一般に、n 人で行うゲームを参加者 n^2 人で行うことを考える。n 人ずつの n グループでゲームを行うことを $n+1$ 回繰り返すことで、総当たりになるような組み合わせが存在する自然数 n について論ぜよ。
3. 問題 1,2 が難しい場合は $n = 3$ の場合を考えよ。

問題５（金沢篤）

1. 正 n 角形の連続する頂点の選び方は $n^2 - n + 1$ 通りあることを示せ。但し全ての頂点を選ぶ選び方は 1 通りとして数える。

2. 正 n 角形の各頂点に相異なる自然数を置くことを考える (Figure 1)。Figure

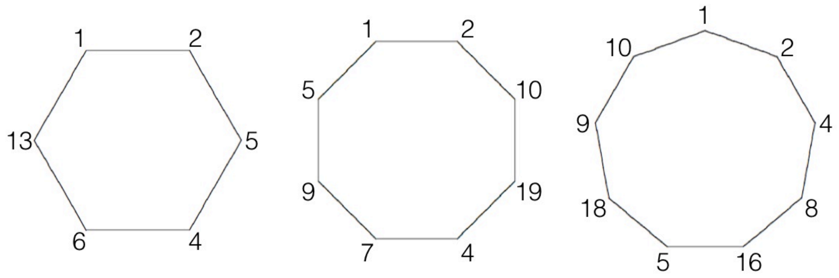

Figure 1: $n = 6, 8, 9$ の場合の例

1 に示した正 6 角形の場合に、1 から 31 までの整数を頂点上の連続する自然数の和によって一意に表現できることを示せ。例えば

$$1,\ 2,\ 3 = 1 + 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 = 2 + 5,\ 8 = 1 + 2 + 5,\ 9 = 5 + 4$$

といった具合である。(更に 1 周以上する和も許せば任意の自然数が一意に表現できることが従う。実は隣の正 8, 9 角形も同様の性質を持つ。)

3. $n = 3, 4, 5$ に対して正 n 角形の頂点に相異なる自然数を適当に置くことで、1 から $n^2 - n + 1$ までの整数を頂点上の連続する自然数の和によって一意に表現できるようにせよ。

4. 一般の n に対して同じ問題を論ぜよ。実は $n = 7, 11, 13$ などの場合は不可能である。

問題６（森田陽介）

非負整数 p, q に対し,

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(p+q, \mathbb{R}), \qquad \mathrm{O}(p,q) = \{A \in \mathrm{M}(p+q, \mathbb{R}) : {}^tAI_{p,q}A = I_{p,q}\},$$

$$\mathcal{H}^{p,q-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p+q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = -1 \right\}$$

と定める．$\mathrm{O}(p,q)$, $\mathcal{H}^{p,q-1}$ にはそれぞれ $\mathrm{M}(p+q,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{p+q}$ の部分位相を入れて位相空間とみなす．$g\in\mathrm{O}(p,q)$, $x\in\mathcal{H}^{p,q-1}$ ならば $gx\in\mathcal{H}^{p,q-1}$ となることが簡単に分かる．そこで $g\in\mathrm{O}(p,q)$ に対し, $\mathcal{H}^{p,q-1}$ 上の同値関係 $\sim_g$ を

$$x\sim_g x' \iff \exists n\in\mathbb{Z},\ g^n x=x'$$

で定める.

1. $g\in\mathrm{O}(2,1)$ に対し, 商空間 $\mathcal{H}^{2,0}/\sim_g$ がHausdorffになることは, $\{g^n : n\in\mathbb{Z}\}$ が $\mathrm{O}(p,q)$ の離散部分集合になることと同値であることを示せ.
2. $g\in\mathrm{O}(1,2)$ に対し, 商空間 $\mathcal{H}^{1,1}/\sim_g$ がHausdorffになることは, $\{g^n : n\in\mathbb{Z}\}$ が $\mathrm{O}(p,q)$ の有限部分集合になることと同値であることを示せ.
3. 一般の p,q の場合に, $g\in\mathrm{O}(p,q)$ に対し, 商空間 $\mathcal{H}^{p,q-1}/\sim_g$ がいつ Hausdorff になるか考えてみよ．またさらに一般に, $\mathrm{O}(p,q)$ の部分群による $\mathcal{H}^{p,q-1}$ の商がいつ Hausdorff になるか考えてみよ.

問題 7（塚本真輝）

ラマヌジャンは円周率 $\pi=3.14159265358979323846264\ldots$ の不思議な近似式として以下のものを見つけた．(Notebooks of Srinivasa Ramanujan, Vulume 2, pp.375-376.)

$$\left(3^4+2^4+\frac{1}{2+(2/3)^2}\right)^{1/4}=3.14159265262\ldots,$$

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3.14164\ldots,$$

$$\frac{63}{25}\cdot\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}=3.14159265380\ldots,$$

$$\frac{7}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{5}\right)=3.14162\ldots,$$

$$\frac{19}{16}\sqrt{7}=3.14180\ldots.$$

では，皆さんもラマヌジャンに挑戦しましょう:自分の好きな数 ($\pi,\pi^2,e,\sqrt{2},\log 2,\ldots$) を一つ選んで，自分なりの面白い近似式を見つけよ．

これは難しすぎる問題かもしれないので，できなくても自信を無くす必要はない．ただ計算機を使って色々実験してみると，きっと面白いと思う．そういう実験の過程で何か面白いものが見つかれば，この問題と直接関係なくても良いので解答として出してください．