問題 3・4 訂正済

ガロア祭 2015 懸賞問題

(提出先は数学教室事務室，**5** 月 **22** 日 **(**金**) 17:00** 締切；発表はガロア祭当日，副賞あり)

$\boxed{1}$

実数 x に対して，

$$\|x\| = |x - (x\text{ に一番近い整数})|$$

と定める．例えば

$$\|1.2\| = \|-2.2\| = 0.2$$

である。
自然数からなる無限集合 S で，次の性質 $(\heartsuit)$ を持つものを構成せよ．

$(\heartsuit)$ 任意の実数 x に対して，S の元からなる数列 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ で

$$\|s_n x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすものが存在する．

注意：性質 $(\heartsuit)$ を満たす S はいくつも存在する．できるだけ面白い S の例を挙げた解答ほど高く評価する．問題が難しいと感じた場合（あるいは面白くないと感じた場合）は，性質 $(\heartsuit)$ 内の実数 x に条件をつけても良い．

$\boxed{2}$

集合 $S^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ を考える．これは球面と呼ばれる．例えば S^1 は円であり，S^2 は通常の球面である．全ての球 S^n には自然な体積の概念がある (回転不変測度とも呼ばれる)．これは極座標表示と変数変換を用いて計算できる．$x, y \in S^{n-1}$ に対して $z = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ を中心として x, y の成す角度を $\mathrm{angle}(x, y)$ で表す．

(1) $x \in S^{n-1}$ とし、$\epsilon > 0$ を取る．このとき，$y \in S^{n-1}$ であって $|\mathrm{angle}(x, y) - \frac{\pi}{2}| < \epsilon$ となるような y の成す集合の面積割合を答えよ。つまり、次の比を計算せよ:

$$V_{\epsilon,n} = \frac{\mathsf{Volume}(y \in S^{n-1}, |\mathrm{angle}(x, y) - \frac{\pi}{2}| < \epsilon)}{\mathsf{Volume}(S^{n-1})}.$$

(2) $n \to \infty$ となるときに $V_{\epsilon,n}$ の挙動はどうなるか答えよ．

(3) $\eta = \eta(n)$ を $V_{\eta,n} = 0.99$ を満たすような n に依存する関数と定める．このとき，$n \to \infty$ としたときの η の挙動を答えよ．

ヒント: この問題はいわゆる測度の集中と呼ばれる現象と関係している．この現象の一つの例としては球体の質量が赤道付近に集中するといったことが挙げられる．

$\boxed{3}$

n 番目のカタラン数は $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ と表される．このとき，

(1) $n \geq 1$ であれば再帰関係式 $C_n = \sum_{m=1}^{n} C_{m-1}C_{n-m}$ が成立することを示せ．

(2) ある連続かつ原点対称な関数 $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって $C_n = \int_{-2}^{2} f(x)x^{2n}dx$ となるものが存在することを示せ．

(3) C_n を $D_n = \binom{2n}{n}$ に置き換えたときに (2) と同じ結論を満たす別の原点対称関数 g が存在することを示し、関数 $g(x)$ を決定せよ．

$\boxed{4}$

n を 0 以上の整数とし、

$$T_0 := 0, \qquad T_n := t + t^2 + \cdots + t^n$$

という多項式を考える．また、m, n を 2 以上の整数で，$m \leq n$ を満たすとする．

(1) $0 < t < 1$ ならば、

$$(T_{m-1} + T_m)(T_{n-1} + T_n) > T_{2m-2}(T_{n+m-1} + T_{n-m})$$

であることを示せ．

(2) N を $m \leq N \leq 2m-2$ を満たす整数とするとき、$0 < t < 1$ ならば

$$(T_{m-1} + T_m)(T_{n-1} + T_n) > T_N(T_{n-m+1+N} + T_{n-m})$$

であることを示せ．

(3) 上のような不等式がどのように一般化されるかを自由に論じよ．

$\boxed{5}$

平面 $\mathbb{R}^2$ 上で，有限個の三角形を重なりが辺または頂点であるようにはりあわせたものを「三角形のはりあわせ」と呼ぶことにしよう．「三角形のはりあわせ」T が F 個の三角形 $T_1, \ldots, T_F \subset \mathbb{R}^2$ からなるとき，$\mathbb{R}^2 \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_F)$ の連結成分の数から 1 をひいた数を T の穴の数とする．1 と図 2 に示す．

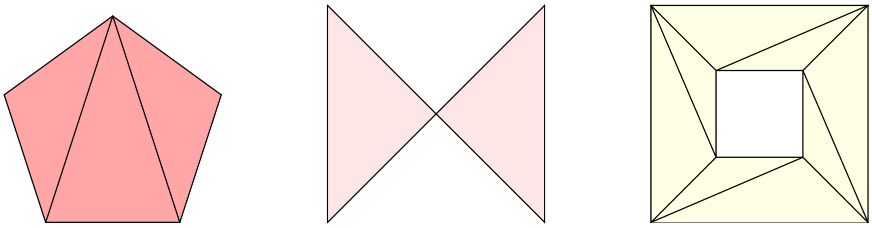

図 1. 「三角形のはりあわせ」の例. 左と真中の穴の数は 0, 右は穴の数は 1.

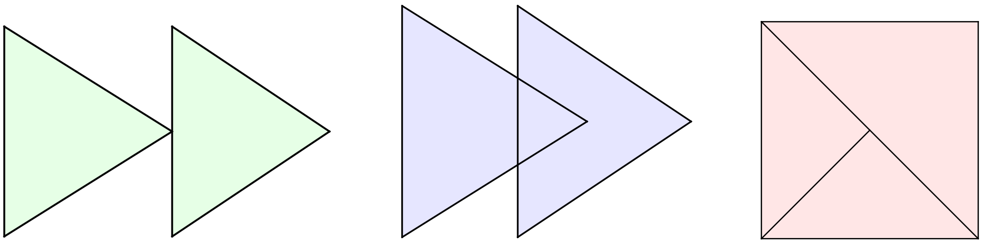

図 2. 「三角形のはりあわせ」でない例. 左:右の三角形から見て, 重なり部分は辺でも頂点でもない. 中:両方の三角形から見て, 重なり部分は辺でも頂点でもない. 右:右上の三角形と左下の三角形の重なり部分は, 右上の三角形から見て, 辺でも頂点でもない.

「三角形のはりあわせ」T の頂点数が V, 辺の数が E, 面の数(三角形の数)が F であるとき, オイラー数 $\chi(T)$ を

$$\chi(T) = V - E + F$$

で定義する.「三角形のはりあわせ」T の穴の数 h とオイラー数 $\chi(T)$ との関係を考えよう.
(1) 穴の数を変えないように三角形をひとつとりのぞいてできる, 新しい「三角形のはりあわせ」を T' とすると $\chi(T) = \chi(T')$ が成り立つことを示せ.
(2) $h = 0$ なら $\chi(T) = 1$ が成り立つことを示せ.
(3) $h > 0$ の場合に穴の数 h とオイラー数 $\chi(T)$ との関係式の予想をたて, それを示せ.

次に折れ線で囲まれた平面の閉領域 D を考えよう.
(4) D を三角形に分割して「三角形のはりあわせ」 T をつくる. そして D のオイラー数 $\chi(D)$ を $\chi(D) = \chi(T)$ と定義する. この定義は三角形分割のしかたによらないことを示せ.

以上. とりあえず小問一つでも良いので何かできたら提出してみてください.

(問題出題: 1. 塚本, 2.3. コリンズ, 4. 藤井, 5. 小西)