

令和9年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2027 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎ 問題は12題ある。数学系志望者は 1～10 のうちの2題を選択して解答せよ。数理解析系志望者は、1～12のうちの2題を選択して解答せよ。(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は2題であり、両系をともに志望している者の解答問題数は、選択によって2～4題となる。) 選択した問題番号を選択票に記入すること。

There are 12 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should select and answer 2 problems out of the 10 problems 1–10. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should select and answer 2 problems out of the 12 problems 1–12. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 2 problems, and applicants to both courses should answer 2-4 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎ 解答時間は 2時間30分 である。

The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎ 問題は日本語および英語で書かれている。解答は日本語または英語どちらかで書くこと。

The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する。指定された荷物置場に置くこと。

It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

[注意] Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと.

Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

Write your name and applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.

Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the sheet that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.

When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.

You may keep this problem sheet.

[記号] Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

1 $\mathbb{Q}$ 上の多項式 $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とする. このとき, 次の間に答えよ.

(1) ガロア群 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

(2) $K/\mathbb{Q}$ の中間体 F であって, $f(X)$ が F 上の多項式として既約になるものを全て求めよ.

2 $\mathbb{C}$ 上の 3 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ のイデアル

$$I = (X^2Y + Z^2, X^4 - Y^3 + 2XYZ)$$

について, 次の間に答えよ.

(1) $\mathbb{C}^3$ の部分集合 V, W を

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{任意の } f \in I \text{ に対して, } f(a, b, c) = 0\}$$

$$W = \{(t^3, -t^4, t^5) \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C}\}$$

で定める. このとき, V と W は等しいかどうかを決定せよ.

(2) I の根基イデアルを J とする. このとき, $\mathbb{C}[X, Y, Z]/J$ が一意分解整域 (UFD) かどうかを決定せよ.

- 3 $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ とする. S^3 の開集合 U と, S^3 の部分多様体 L, M を以下のように定める.

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x, y, z, w) \in S^3 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \right\}, \\ L &= \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid z = w = 0\}, \\ M &= \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid x = y = 0\}. \end{aligned}$$

L には向きが定められているとする.

- (1) S^3 上の C^∞ 級 1 次微分形式 η で

$$d\eta|_U = 0, \quad \int_L \eta = 1 \quad (*)$$

を満たすものが存在することを示せ. ここで, $d\eta|_U$ は $d\eta$ の U への制限を表す.

- (2) η を条件 (*) を満たす S^3 上の C^∞ 級 1 次微分形式とする. S^3 と M の向きを適切に選ぶとき, 次が成立することを示せ. S^3 上の C^∞ 級 1 次微分形式 ξ が $\text{supp}(d\xi) \subset U$ を満たすなら

$$\int_{S^3} d\eta \wedge \xi = \int_M \xi$$

が成立する. ここで, $\text{supp}(d\xi)$ は $\{p \in S^3 \mid (d\xi)_p \neq 0\}$ の閉包を表す.

- 4 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$ とする. ここで, $|\mathbf{x}|$ は $\mathbb{R}^3$ における $\mathbf{x}$ の標準ノルムである. $S \times S$ の部分空間 E を

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S \times S \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$$

とする. ここで, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ は $\mathbb{R}^3$ における $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の標準内積である.

- (1) E の整数係数ホモロジー群を求めよ.
 (2) $\pi: E \rightarrow S$ を $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$ で定める. $E \times E$ の部分空間 F を

$$F = \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid \pi(e_1) = \pi(e_2)\}$$

とする. F の整数係数ホモロジー群を求めよ.

5 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし, $\mathcal{M}$ -可測関数 $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ と $r \in (1, \infty)$ に対し

$$\|h\|_r = \left(\int_X |h|^r d\mu \right)^{1/r}$$

と定める. $p \in (1, \infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$ とし, $\mathcal{M}$ -可測関数 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ と $\mathcal{M}$ -可測関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ は次の条件 (A), (B), (C) を満たすとする:

(A) μ -a.e. $x \in X$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

(B) 任意の正の整数 n に対し $\|f_n\|_p < \infty$.

(C) $\|g\|_q < \infty$ を満たす任意の $\mathcal{M}$ -可測関数 $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n g d\mu = 0.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\|f\|_p \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p < \infty$ であることを示せ.

(2) $E \in \mathcal{M}$ は $\mu(E) < \infty$ を満たすとする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

が成立することを示せ.

(3) μ -a.e. $x \in X$ に対し $f(x) = 0$ であることを示せ.

6 X を無限次元実 Banach 空間とし, $\mathbb{K}$ を X から X へのコンパクト線形作用素全体のなす実線形空間とする. また, X から X への有界線形作用素 T に対し $\|T\|$ を T の作用素ノルムとする.

(1) 正の整数 n に対し $T_n \in \mathbb{K}$ とし, T は X から X への有界線形作用素で $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ を満たすとする. このとき $T \in \mathbb{K}$ であることを示せ.

(2) L, R は $\mathbb{K}$ から $\mathbb{K}$ への線形写像であり, 任意の $S, T \in \mathbb{K}$ に対して

$$SL(T) = R(S)T$$

が成り立つとする. このとき L はノルム空間 $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ からそれ自身への有界線形作用素であることを示せ.

7

集合 X, Y を次で定める:

$$X = \left\{ f \left| \begin{array}{l} f: [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ は連続,} \\ f \text{ は } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \text{ について } C^2 \text{ 級, かつ} \\ \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ は } [0, \infty) \times [0, \pi] \text{ 上の実数値連続関数に拡張できる} \end{array} \right. \right\},$$

$$Y = \left\{ g \left| \begin{array}{l} g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ は連続, } g \text{ は } (0, \pi) \text{ 上で } C^3 \text{ 級, かつ} \\ g', g'', g''' \text{ は } [0, \pi] \text{ 上の実数値連続関数に拡張できる} \end{array} \right. \right\}.$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $u_0 \in Y$ は $u'_0(0) = u'_0(\pi) = 0$ を満たすとする. このとき $u \in X$ で次の (A) を満たすものがただ一つ存在することを示せ:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + u(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{A})$$

- (2) $\alpha \in (0, \infty)$ とし, $w_0 \in Y$ は $w'_0(0) = \alpha, w'_0(\pi) = -\alpha$ および次の (B) を満たすとする:

$$\int_0^\pi w_0(y) dy = 2\alpha, \quad \int_0^\pi w_0(y) \cos y dy = 0. \quad (\text{B})$$

さらに $w \in X$ は次の (C) を満たすとする:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + w(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = \alpha, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, \pi) = -\alpha, & t \geq 0, \\ w(0, x) = w_0(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{C})$$

このとき, ある定数 $C \in (0, \infty)$ と $\phi \in Y$ が存在して, 任意の $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$ に対して

$$|w(t, x) - \phi(x)| \leq Ce^{-3t}$$

となることを示せ.

8

時刻 $t \in \mathbb{R}$ の実数値関数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ が, $a \in \mathbb{R}$ をパラメータとする微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y + yz \\ \frac{dy}{dt} = x + ay + zx \\ \frac{dz}{dt} = az - 2xy \end{cases}$$

を満たしているとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

で定める. ある定数 C が存在し, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) \leq C V(x(t), y(t), z(t))$$

が成り立つことを示せ.

- (2) どのような初期値とパラメータ $a \in \mathbb{R}$ に対しても, 微分方程式 $(*)$ の解は有限時刻で爆発しないことを示せ.
- (3) 原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ が線形安定となるための a の必要十分条件を求めよ.
- (4) 原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ が線形安定であるとき, 微分方程式 $(*)$ の任意の解が $t \rightarrow \infty$ で原点に収束することを示せ.

9

流体より十分重い微粒子が流体中を沈降していく状況を考える．一つ一つの微粒子の運動は重力と抵抗力が釣り合っている．微粒子同士の相互作用は考えない．

- (1) x 軸を鉛直上向きにとり，重力が x 軸負方向に働いているとする．粒子質量を m ，一つ一つの粒子の x 方向の速度を u ，抵抗力を $-\gamma u$ ，重力を $-mg(x)$ とするとき，微粒子の運動を定める式を書き下せ．ただし m と γ は正の定数である．

以下では， $g_0 > 0$ を正の定数として $g(x) = g_0 x$ と与える．

- (2) 定数 $\alpha = m g_0 / \gamma$ を用いて粒子の位置 $x(t)$ と速度 $u(t)$ を求めよ．ただし t は時刻であり， $t = 0$ での位置を $x(0) = \xi > 0$ とする．
- (3) 微粒子の数密度分布 $\rho(x, t)$ は

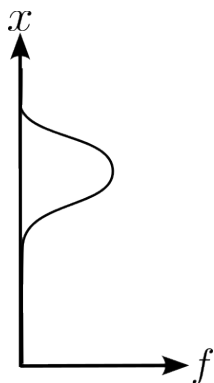
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

に従うとする．ここで u は (2) で求めた速度に等しいとする．ある高度の周りに集中して微粒子が存在している状況を考えて $\rho(0, t) = \rho(\infty, t) = 0$ とする．このとき，

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \rho(x, t) dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

- (4) $t = 0$ での分布が $\rho(x, 0) = f(x)$ と与えられるとする． $x = \xi e^{-\alpha \tau}$, $t = \tau$ で定められる $(\xi, \tau) \rightarrow (x, t)$ を変数変換することにより $\rho(x, t)$ を定めよ．
- (5) $f(x)$ が下図のような分布をしているとき，数密度 ρ の x 分布の概形がどのように時間変化するのかを，グラフを描いて記述せよ．



- (1) 非負整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書く. $(A, <_A)$ を整列集合とする. 関数 $t: A \rightarrow \mathbb{N}$ のうち, 有限個を除くすべての $a \in A$ で $t(a) = 0$ となるものの全体の集合を $M(A)$ とする. また, $M(A)$ 上の 2 項関係 $<_{M(A)}$ を以下で定める.

$$t <_{M(A)} u \iff \text{ある } a \in A \text{ が存在し, } t(a) < u(a) \text{ かつ} \\ \text{全ての } a' >_A a \text{ について } t(a') = u(a').$$

このとき $(M(A), <_{M(A)})$ は整列集合であることを証明せよ.

- (2) 非負整数のリスト $\ell = [m_1, m_2, \dots, m_k]$ と非負整数 n に対する以下の操作を考える.

$$\begin{aligned} \text{len}(\ell) &= k, \\ \text{cons}(n, \ell) &= [n, m_1, m_2, \dots, m_k], \\ \text{hd}(\ell) &= m_1, \\ \text{tl}(\ell) &= [m_2, \dots, m_k]. \end{aligned}$$

ただし ℓ が空リストのとき $\text{hd}(\ell)$ と $\text{tl}(\ell)$ は未定義とする. 非負整数の任意のリスト ℓ に対して, 次のプログラムは停止することを証明せよ.

```

 $L \leftarrow \ell; X \leftarrow 0; Y \leftarrow 0; Z \leftarrow 0;$ 
while  $\text{len}(L) > 1$  do
   $X \leftarrow \text{hd}(L); L \leftarrow \text{tl}(L); Y \leftarrow \text{hd}(L); L \leftarrow \text{tl}(L);$ 
  while  $X > 0$  do
    while  $Y > 0$  do
       $Y \leftarrow Y - 1; Z \leftarrow Z + 1; L \leftarrow \text{cons}(X, \text{cons}(Y, L))$ 
    done;
     $X \leftarrow X - 1; Y \leftarrow Z$ 
  done
done

```

ただし $V \leftarrow e$ は, 式 e の値をプログラム変数 V に代入する操作を表す.

11

$G = (V, E)$ を頂点集合 V と辺集合 E をもつ単純な有限無向グラフとする. 頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対して, X と $V \setminus X$ を結ぶ G の辺の本数を $f(X)$ と表す. また, $\mathcal{F}$ を $X \neq \emptyset$ をみたす $X \subsetneq V$ のうち $f(X)$ を最小化するもの全体の集合とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して, 以下の2式が成り立つことを示せ.

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \setminus Y) + f(Y \setminus X)$$

(2) $X \cap Y \neq \emptyset$ かつ $X \cup Y \neq V$ をみたす $X, Y \in \mathcal{F}$ に対して, $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ が成り立ち, さらに $X \setminus Y$ と $Y \setminus X$ を結ぶ G の辺が存在しないことを示せ.

(3) $X \cap Y \neq \emptyset, X \cup Y \neq V, X \setminus Y \neq \emptyset, Y \setminus X \neq \emptyset$ をみたす $X, Y \in \mathcal{F}$ が存在するとき, $\min\{f(X) \mid X \subsetneq V, X \neq \emptyset\}$ の値は偶数であることを示せ.

12

ρ を有限次元複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の密度行列とする. $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 X について

$$\langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X), \quad \Delta X = X - \langle X \rangle \text{id}_{\mathcal{H}}$$

と定める. ただし $\text{id}_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素である. $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 X について X^* はその共役作用素とする. 複素数 c について $\bar{c}$ を複素共役, $|c|$ を絶対値とする.

(1) $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 X について

$$\langle X^* \rangle = \overline{\langle X \rangle}$$

を示せ.

(2) $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A, B について

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

を示せ. ここで $[A, B] = AB - BA$ である.

The English translation starts here.

1 Let K be the minimal splitting field of the polynomial $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2$ over $\mathbb{Q}$. Answer the following questions.

- (1) Determine the Galois group $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
- (2) Determine all intermediate fields F of $K/\mathbb{Q}$ such that $f(X)$ is irreducible as a polynomial over F .

2 Let $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ be the polynomial ring in three variables over $\mathbb{C}$. We define the ideal I of $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ by

$$I = (X^2Y + Z^2, X^4 - Y^3 + 2XYZ).$$

Answer the following questions.

- (1) We define the subsets V, W of $\mathbb{C}^3$ by

$$\begin{aligned} V &= \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid f(a, b, c) = 0 \text{ for every } f \in I\}, \\ W &= \{(t^3, -t^4, t^5) \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Determine whether or not V is equal to W .

- (2) Let J be the radical of I . Determine whether or not $\mathbb{C}[X, Y, Z]/J$ is a unique factorization domain (UFD).

3

Let $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$. We define an open set U of S^3 and submanifolds L, M of S^3 by

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x, y, z, w) \in S^3 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \right\}, \\ L &= \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid z = w = 0\}, \\ M &= \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid x = y = 0\}. \end{aligned}$$

We assume that L is oriented.

- (1) Prove that there exists a C^∞ 1-form η on S^3 satisfying

$$d\eta|_U = 0, \quad \int_L \eta = 1. \quad (*)$$

Here $d\eta|_U$ is the restriction of $d\eta$ to U .

- (2) Let η be a C^∞ 1-form on S^3 that satisfies the condition (*). Prove that the following statement holds for suitable choices of the orientations of S^3 and M . If a C^∞ 1-form ξ on S^3 satisfies $\text{supp}(d\xi) \subset U$, then we have

$$\int_{S^3} d\eta \wedge \xi = \int_M \xi.$$

Here $\text{supp}(d\xi)$ is the closure of $\{p \in S^3 \mid (d\xi)_p \neq 0\}$.

4

We set $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$, where $|\mathbf{x}|$ is the standard norm of $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^3$. We define a subspace E of $S \times S$ by

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S \times S \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\},$$

where $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ is the standard inner product of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^3$.

- (1) Compute the homology groups of E with integer coefficients.
 (2) We define a map $\pi: E \rightarrow S$ by $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$. We define a subspace F of $E \times E$ by

$$F = \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid \pi(e_1) = \pi(e_2)\}.$$

Compute the homology groups of F with integer coefficients.

5 Let $(X, \mathcal{M}, \mu)$ be a measure space, and set

$$\|h\|_r = \left(\int_X |h|^r d\mu \right)^{1/r}$$

for each $\mathcal{M}$ -measurable function $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ and $r \in (1, \infty)$. Let $p \in (1, \infty)$, set $q = \frac{p}{p-1}$, and suppose that a sequence $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ of $\mathcal{M}$ -measurable functions $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ and an $\mathcal{M}$ -measurable function $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfy the following conditions (A), (B) and (C):

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ for μ -a.e. $x \in X$.

(B) $\|f_n\|_p < \infty$ for any positive integer n .

(C) For any $\mathcal{M}$ -measurable function $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying $\|g\|_q < \infty$, it holds that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n g d\mu = 0.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\|f\|_p \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p < \infty$.

(2) Let $E \in \mathcal{M}$ satisfy $\mu(E) < \infty$. Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

(3) Show that $f(x) = 0$ for μ -a.e. $x \in X$.

6 Let X be an infinite-dimensional real Banach space, and let $\mathbb{K}$ be the real vector space of compact linear operators from X to X . For each bounded linear operator T from X to X , let $\|T\|$ denote the operator norm of T .

(1) Let $T_n \in \mathbb{K}$ for each positive integer n , let T be a bounded linear operator from X to X , and suppose that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$. Show that $T \in \mathbb{K}$.

(2) Let L and R be linear maps from $\mathbb{K}$ to $\mathbb{K}$. Suppose that

$$SL(T) = R(S)T$$

for all $S, T \in \mathbb{K}$. Show that L is a bounded linear operator from the normed space $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ to itself.

7

Define sets X and Y as follows:

$$X = \left\{ f \left| \begin{array}{l} f: [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ is continuous,} \\ f \text{ is } C^2 \text{ for } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi), \text{ and} \\ \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ are extended to} \\ \text{real valued continuous functions on } [0, \infty) \times [0, \pi] \end{array} \right. \right\},$$

$$Y = \left\{ g \left| \begin{array}{l} g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ is continuous, } g \text{ is } C^3 \text{ on } (0, \pi), \\ g', g'' \text{ and } g''' \text{ are extended to} \\ \text{real valued continuous functions on } [0, \pi] \end{array} \right. \right\}.$$

Answer the following questions.

- (1) Let $u_0 \in Y$ satisfy $u'_0(0) = u'_0(\pi) = 0$. Show that there exists a unique element u of X satisfying the following:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + u(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{A})$$

- (2) Let $\alpha \in (0, \infty)$ and $w_0 \in Y$ satisfy $w'_0(0) = \alpha$, $w'_0(\pi) = -\alpha$, and the following:

$$\int_0^\pi w_0(y) dy = 2\alpha, \quad \int_0^\pi w_0(y) \cos y dy = 0. \quad (\text{B})$$

Furthermore, let $w \in X$ satisfy the following:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + w(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = \alpha, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, \pi) = -\alpha, & t \geq 0, \\ w(0, x) = w_0(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{C})$$

Show that there exist a constant $C \in (0, \infty)$ and $\phi \in Y$ such that

$$|w(t, x) - \phi(x)| \leq Ce^{-3t}$$

for any $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$.

8

Let $a \in \mathbb{R}$. Consider the following differential equations for real-valued functions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ with respect to time $t \in \mathbb{R}$,

$$(*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y + yz, \\ \frac{dy}{dt} = x + ay + zx, \\ \frac{dz}{dt} = az - 2xy. \end{cases}$$

Answer the following questions.

- (1) Let $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be a function, given by

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Show that there exists a constant C such that for any $t \in \mathbb{R}$, the inequality

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) \leq CV(x(t), y(t), z(t))$$

holds.

- (2) Show that for any initial values and any $a \in \mathbb{R}$, the solutions of the differential equations $(*)$ do not blow up at a finite time.
- (3) Find the condition on a such that the origin $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ is linearly stable.
- (4) When the origin $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ is linearly stable, show that all solutions of the differential equations $(*)$ converge to the origin as $t \rightarrow \infty$.

9

Let us consider sedimentation of small particles. These particles are sufficiently heavier than the surrounding fluid. The forces of gravity and resistance are balanced for each particle. The interactions between particles are ignored.

- (1) Take the x axis to denote the vertical upward direction and assume that gravity operates in the negative x direction. Let us denote the particle mass by m , the upward velocity by u , the resistance by $-\gamma u$ and the gravity by $-mg(x)$, where m and γ are positive constants. Write an equation determining the motion of each particle.

Suppose that $g(x) = g_0 x$, where g_0 is a positive constant.

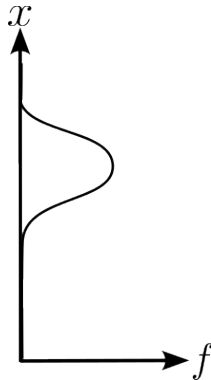
- (2) Find the position of the particle $x(t)$, and its velocity $u(t)$, using the constant, $\alpha = mg_0/\gamma$. Here, t is time, and the position at $t = 0$ is defined as $x(0) = \xi > 0$.
- (3) Suppose that the particle's number density, $\rho(x, t)$, obeys the following equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0.$$

Here, u denotes the velocity obtained in (2). Furthermore, we assume $\rho(0, t) = \rho(\infty, t) = 0$ by supposing that the particles concentrate around a certain height. Then, show the relation

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \rho(x, t) dx = 0.$$

- (4) When the initial distribution is given as $\rho(x, 0) = f(x)$, obtain the distribution at time t , $\rho(x, t)$, by performing the coordinate transformation from (x, t) to (ξ, τ) , where $x = \xi e^{-\alpha \tau}$ and $t = \tau$.
- (5) Assuming that the initial distribution $f(x)$ is shown as in the figure below, explain how the x -profile of the number density ρ evolves over time by drawing a graph.



- (1) We write $\mathbb{N}$ for the set of nonnegative integers. Let $(A, <_A)$ be a well-ordered set. Define $M(A)$ to be the set of functions $t: A \rightarrow \mathbb{N}$ such that $t(a) = 0$ for all but finitely many $a \in A$. Define a binary relation $<_{M(A)}$ on $M(A)$ by

$$t <_{M(A)} u \iff \text{there exists some } a \in A \text{ such that } t(a) < u(a) \\ \text{and } t(a') = u(a') \text{ for every } a' >_A a.$$

Prove that $(M(A), <_{M(A)})$ is a well-ordered set.

- (2) Consider the following operations on a list $\ell = [m_1, m_2, \dots, m_k]$ of nonnegative integers and a nonnegative integer n :

$$\begin{aligned} \mathbf{len}(\ell) &= k, \\ \mathbf{cons}(n, \ell) &= [n, m_1, m_2, \dots, m_k], \\ \mathbf{hd}(\ell) &= m_1, \\ \mathbf{tl}(\ell) &= [m_2, \dots, m_k], \end{aligned}$$

where $\mathbf{hd}(\ell)$ and $\mathbf{tl}(\ell)$ are undefined when ℓ is the empty list. Prove that the following program halts for any list ℓ of nonnegative integers.

```

L ← ℓ; X ← 0; Y ← 0; Z ← 0;
while len(L) > 1 do
  X ← hd(L); L ← tl(L); Y ← hd(L); L ← tl(L);
  while X > 0 do
    while Y > 0 do
      Y ← Y − 1; Z ← Z + 1; L ← cons(X, cons(Y, L))
    done;
  X ← X − 1; Y ← Z
done
done

```

Here, $V \leftarrow e$ stands for an operation that assigns the value of expression e to program variable V .

11

Let $G = (V, E)$ be a simple finite undirected graph with the vertex set V and the edge set E . For a vertex set $X \subseteq V$, we write $f(X)$ for the number of edges of G between X and $V \setminus X$. Let $\mathcal{F}$ denote the set of all $X \subsetneq V$ with $X \neq \emptyset$ that minimize $f(X)$. Answer the following questions.

(1) Show that for every $X, Y \subseteq V$, we have

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &\geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y), \\ f(X) + f(Y) &\geq f(X \setminus Y) + f(Y \setminus X). \end{aligned}$$

(2) Show that for every $X, Y \in \mathcal{F}$ with $X \cap Y \neq \emptyset$ and $X \cup Y \neq V$, we have $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$, and there is no edge of G between $X \setminus Y$ and $Y \setminus X$.

(3) Suppose that there are $X, Y \in \mathcal{F}$ satisfying $X \cap Y \neq \emptyset, X \cup Y \neq V, X \setminus Y \neq \emptyset$ and $Y \setminus X \neq \emptyset$. Show that $\min\{f(X) \mid X \subsetneq V, X \neq \emptyset\}$ is an even number.

12

Let $\mathcal{H}$ be a finite-dimensional complex Hilbert space, and ρ be a density matrix on $\mathcal{H}$. For each linear operator X on $\mathcal{H}$, set

$$\langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X), \quad \Delta X = X - \langle X \rangle \text{id}_{\mathcal{H}}.$$

Here, $\text{id}_{\mathcal{H}}$ denotes the identity operator on $\mathcal{H}$. For each linear operator X on $\mathcal{H}$, X^* denotes its adjoint operator. For each complex number c , let $\bar{c}$ be its complex conjugate and $|c|$ its absolute value.

(1) Prove that any linear operator X on $\mathcal{H}$ satisfies

$$\langle X^* \rangle = \overline{\langle X \rangle}.$$

(2) Prove that any self-adjoint operators A and B on $\mathcal{H}$ satisfy

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2.$$

Here, $[A, B] = AB - BA$.