

令和9年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2027 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎ 問題は7題ある。数学系志望者は①～⑥の6題を解答せよ。数理解析系志望者は、①～⑤の5題を解答し、さらに、⑥、⑦のうちの1題を選択して解答せよ。(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は6題であり、両系をともに志望している者の解答問題数は、選択によって6題または7題となる。) 選択した問題番号を選択票に記入すること。

There are 7 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should answer the 6 problems ①～⑥. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should answer the 5 problems ①～⑤, and also one problem from ⑥, ⑦. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 6 problems in total, and applicants to both courses should answer 6 or 7 problems in total, depending on their choice.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎ 解答時間は 3時間30分 である。

The duration of the examination is 3 hours and 30 minutes.

◎ 問題は日本語および英語で書かれている。解答は日本語または英語どちらかで書くこと。

The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する。指定された荷物置場に置くこと。

It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

[注意] Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと.

Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

Write your name and the applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.

Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 題を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the sheet that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.

When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.

You may keep this problem sheet.

[記号] Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体の集合, 有理数の全体の集合, 実数の全体の集合, 複素数の全体の集合を表す.

In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

- 1 実数 $\alpha < \frac{3}{2}$ と領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < x + y\}$ に対して広義積分

$$\iint_D \frac{|x - y|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$$

の値を求めよ.

- 2 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2a & 1 & 2 \\ 3a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}$ 上で対角化可能となる実数 a をすべて求めよ. ただし, 実 n 次正方行列 A が $\mathbb{R}$ 上で対角化可能であるとは, $P^{-1}AP$ が対角行列となる実 n 次正則行列 P が存在することをいう.

- 3 V を有限次元複素ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を線形写像であって

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f)$$

を満たすものとする. このとき, V の次元は 3 の倍数であることを示せ.

- 4 开区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値連続関数 f が次の条件 (*) を満たすとする. このとき, $xf(x)$ は定数関数であることを示せ.

(*) 正の整数 n に対して, $f_n(x) = nf(nx)$ とおく. このとき, $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 g が存在して, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は g に $(0, \infty)$ 上で一様収束する.

- 5 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi x}{x^4 - 6x^2 + 25} dx$$

の値を求めよ.

6 写像 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}f(\cos \theta, \sin \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\g(\cos \theta, \sin \theta) &= (1 + \cos \theta, 0, \sin \theta)\end{aligned}$$

$(0 \leq \theta < 2\pi)$ と定義し, 写像 $\phi: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ を, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^1$ に対して

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{\|g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|}$$

で定義する. このとき, 点 $(1, 0, 0) \in S^2$ は ϕ の正則値であることを示せ. ただし, S^1 は $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする半径 1 の円周とし, S^2 は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面とする. また, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

とする.

7 $\mathbb{R}$ の部分集合 X を

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } i \geq 1 \text{ に対して } x_i \in \{0, 2\} \right\}$$

で定める. $\mathbb{R}$ のユークリッド距離により, X を位相空間とみなす. また, n を正の整数, $a_1, \dots, a_n$ を集合 $\{0, 2\}$ の元とする. X の部分集合 A を

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n), \text{ 任意の } i > n \text{ に対して } x_i \in \{0, 2\} \right\}$$

で定める. このとき, A が X の開集合かつ閉集合であることを示せ.

The English translation starts here.

- 1 Let α be a real number satisfying $\alpha < \frac{3}{2}$. For $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < x + y\}$, find the value of the improper integral

$$\iint_D \frac{|x - y|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy.$$

- 2 Determine the real numbers a such that the 3×3 matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2a & 1 & 2 \\ 3a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

is diagonalizable over $\mathbb{R}$. Here, a real $n \times n$ matrix A is said to be diagonalizable over $\mathbb{R}$ if there exists a real $n \times n$ regular matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

- 3 Let V be a finite-dimensional complex vector space and let $f: V \rightarrow V$ be a linear map such that

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f).$$

Show that the dimension of V is divisible by 3.

- 4 Let f be a real-valued continuous function on the open interval $(0, \infty)$ that satisfies the following condition (*). Show that $xf(x)$ is a constant function.

(*) For any positive integer n , let $f_n(x) = nf(nx)$. Then there exists a real-valued function g on $(0, \infty)$ such that the sequence of functions $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converges to g uniformly on $(0, \infty)$.

- 5 Find the value of the improper integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi x}{x^4 - 6x^2 + 25} dx.$$

6 Let $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ and $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the maps given by

$$\begin{aligned} f(\cos \theta, \sin \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ g(\cos \theta, \sin \theta) &= (1 + \cos \theta, 0, \sin \theta) \end{aligned}$$

respectively for $0 \leq \theta < 2\pi$. Define the map $\phi: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ by

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{\|g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|}$$

for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^1$. Show that the point $(1, 0, 0) \in S^2$ is a regular value of ϕ . Here, S^1 denotes the unit circle in $\mathbb{R}^2$ with the center $(0, 0)$, S^2 denotes the unit sphere in $\mathbb{R}^3$ with the center $(0, 0, 0)$, and we set

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

for $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

7 Define a subset X of $\mathbb{R}$ by

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid x_i \in \{0, 2\} \text{ for every } i \geq 1 \right\}.$$

We regard X as a topological space by the Euclidean distance of $\mathbb{R}$. Moreover, let n be a positive integer, and let $a_1, \dots, a_n$ be elements of the set $\{0, 2\}$. Define a subset A of X by

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n), x_i \in \{0, 2\} \text{ for every } i > n \right\}.$$

Show that the subset A of X is open and closed.