令和 8 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2026 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎　問題は 13 題ある．数学系志望者は $\boxed{1}$〜$\boxed{11}$ のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{13}$ のうちの 2 題を選択して解答せよ.（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 2〜4 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．

There are 13 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should select and answer 2 problems out of the 11 problems $\boxed{1}$-$\boxed{11}$. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should select and answer 2 problems out of the 13 problems $\boxed{1}$-$\boxed{13}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 2 problems, and applicants to both courses should answer 2-4 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．

The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．

The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと．
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.
6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ 環 $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ に対して次の問に答えよ．

(1) R は整域であることを示せ．

(2) R が単項イデアル整域（PID) かどうかを決定せよ．

$\boxed{2}$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{-3}})$ とし，K を含む $\mathbb{Q}$ 上の最小のガロア拡大体を F とする．このとき，ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 奇素数 p に対して，$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を有限体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の 2 次一般線型群とする．このとき，G の部分群 H で $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ と同型なものの個数を求めよ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級微分形式 φ を次のように定める．

$$\varphi = \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^4}.$$

また，$\mathbb{R}^3$ の C^∞ 級部分多様体 S^2 を次のように

$$S^2 = \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \mid s^2+t^2+u^2 = 1\}$$

おく．

(1) 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ を次のように

$$f(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

定める．S^2 上の C^∞ 級微分形式 ψ で $f^*\psi = \varphi$ をみたすものが一意的に存在することを示せ．

(2) $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．$\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級閉微分形式 $\tilde{\varphi}$ で $(\iota \circ f)^*\tilde{\varphi} = \varphi$ をみたすものは存在しないことを証明せよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の部分集合 U, V, W を次のように定める．

$$U = \left\{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, p \neq q\right\},$$
$$V = \left\{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, q \neq r\right\},$$
$$W = \left\{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \neq p\right\}.$$

(1) $X = U \cup V \cup W$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $Y = U \cap V \cap W$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は $\mu(X) < \infty$ をみたす測度空間とし，L は正の実数とする．X 上の実数値または複素数値 μ-可積分関数 f について，次の命題 P を考える．

命題 P: $\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq L\mu(A)$ が任意の $A \in \mathcal{M}$ について成り立つならば，

$$|f(x)| \leq L, \quad \mu\text{-a.e.}\, x$$

が成り立つ．

(1) f が実数値であるとき，命題 P を証明せよ．

(2) f が複素数値であるとき，命題 P を証明せよ．

$\boxed{7}$ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする．$H^\infty(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数全体のなす複素バナッハ空間とし，$f \in H^\infty(\mathbb{D})$ のノルムを

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$$

とする．$0 < r \leq 1$ に対して，作用素 $T_r \colon H^\infty(\mathbb{D}) \to H^\infty(\mathbb{D})$ を

$$(T_r f)(z) = \int_0^r f(tz)\, dt$$

と定める．

(1) $0 < r < s < 1$ を固定する．次の条件 $(*)$ を満たす連続関数

$$k \colon [0, r] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

が存在することを示せ．

$(*)$ 任意の $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$(T_r f)(z) = \int_0^r \int_0^{2\pi} k(t, \theta, z) f(se^{i\theta})\, d\theta dt.$$

ただし i は虚数単位とする．

(2) T_1 はコンパクト作用素であることを示せ．

$\boxed{8}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は C^∞ 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし，$\overline{\Omega}$ を Ω の閉包とする．$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ を $x \in \partial\Omega$ における $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとする．関数 $u \colon \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続で $\Omega \times (0, \infty)$ 上 C^∞ 級であり，かつ u の各階の偏導関数は $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ 上の有界な連続関数として拡張でき，さらに u は次をみたすとする:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0\,, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0\,, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \displaystyle\int_\Omega u(x, 0)\, dx \neq 0\,. & \end{cases}$$

ただし，$\Delta u = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$，$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_k} \nu_k$ である．関数 $M(t), E(t)$ を

$$M(t) = \int_\Omega u(x,t)\,dx\,, \qquad E(t) = \int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx$$

により定めるとき，以下の (1)，(2)，(3)，(4) を示せ．

(1) $M(t)$ は t によらない定数関数である．

(2) 任意の $t > 0$ に対して，$E(t) \le E(0)$ が成り立つ．

(3) $H(t) = \log E(t)$ とおくとき，任意の $t > 0$ に対して，$\frac{d^2 H}{dt^2}(t) \ge 0$ が成り立つ．

(4) 任意の $T > 0$ と $t \in (0,T)$ に対して，$E(t) \le E(0)^{1-\frac{t}{T}} E(T)^{\frac{t}{T}}$ が成り立つ．

$\boxed{9}$ C^2 級関数 $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $p(x+1) = p(x)$ かつ $|p'(x)| < 1$ を満たす．このとき，$t \in \mathbb{R}$ の関数 $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ に対する以下の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 2 - y - p'(x).$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $y_0 \in [1,3]$ とする．初期値を $x(0) = 0$，$y(0) = y_0$ とする初期値問題を考える．このとき，初期値問題の相空間 (x,y) における解軌道は，ある有限の時間 T で，$x = 1$ とただ一点で交わることを示せ．

(2) $p(x)$ の周期性より，この微分方程式は相空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 上の解を定めている．このとき，(1) で得られた初期値問題の解の中に，この相空間上の周期 T の周期軌道が存在することを示せ．

(3) $A(t)$ を

$$A(t) = \frac{y^2(t)}{2} + p(x(t))$$

で定める．このとき，(2) で得られた任意の周期軌道に対して $A(0) = A(T)$ となることを使って，(2) の周期軌道がただ一つであることを示せ．

$\boxed{10}$ 3 次元空間中の非圧縮性磁気流体を考える．直交座標系を (x,y,z) として, 流体の速度場 $\boldsymbol{u}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$, ならびに圧力場 p は次の式に従う.

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla \left(p + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{B}, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \beta \nabla^2 \boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

ここで $\beta > 0$ は磁気拡散率であり定数である.

(1) $\boldsymbol{u} = (0, v(x,t), 0)$, $\boldsymbol{B} = (1, b(x,t), 0)$, $p = p(x,t)$ とするときの $b(x,t)$ の従う偏微分方程式を導け.

(2) $x = 0$ にて $b(0,t) = e^{-it}$ が与えられたときの $x > 0$ での $b(x,t)$ を考える. $b = \hat{b}(x)e^{-it}$ の形を仮定し, $x \to \infty$ で $|\hat{b}|$ が有界であるとする.

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 - i\beta}, \quad \mathrm{Im}\ \alpha > 0$$

のように定義される複素数 α を用いて $\hat{b}(x)$ 及び $b(x,t)$ を求めよ. ここで i は虚数単位とする.

(3) (2) の b について $f = -\dfrac{1}{|b|^2}\dfrac{d|b|^2}{dx}$ を計算せよ.

(4) (3) で求めた f を β の関数とみて, $0 < \beta < \infty$ の範囲で $f(\beta)$ の最大値を求めて $f(\beta)$ の振る舞いを記述せよ.

$\boxed{11}$ 以下の文法

$$\mathsf{Term} \ni M \ ::= \ \mathbf{K} \mid \mathbf{W} \mid (M\,M)$$

で定まる項の集合 Term を考える．すなわち，Term は,

(i) $\mathbf{K}$ と $\mathbf{W}$ を要素に持ち，かつ,

(ii) M_1 と M_2 が要素であるとき $(M_1\,M_2)$ も要素である

ような集合のなかで最小のものである．評価関係 $(\_) \Downarrow (\_) \subseteq \mathsf{Term} \times \mathsf{Term}$ を，以下の 6 個の規則

$$\frac{}{\mathbf{K} \Downarrow \mathbf{K}} \qquad \frac{}{\mathbf{W} \Downarrow \mathbf{W}} \qquad \frac{M \Downarrow \mathbf{K}}{(M\,N) \Downarrow (\mathbf{K}\,N)} \qquad \frac{M \Downarrow \mathbf{W}}{(M\,N) \Downarrow (\mathbf{W}\,N)}$$

$$\frac{M \Downarrow (\mathbf{K}\,L) \quad L \Downarrow V}{(M\,N) \Downarrow V} \qquad \frac{M \Downarrow (\mathbf{W}\,L) \quad ((L\,N)\,N) \Downarrow V}{(M\,N) \Downarrow V}$$

をみたす Term 上の二項関係のなかで最小のものとする．ただし，規則

$$\frac{A_1 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

$(n \geq 0)$ は,「$A_1, \ldots, A_n$ が成り立つならば B が成り立つ」ということを表す．以下の問いに答えよ.

(1) 任意の項 $M, V \in \mathsf{Term}$ について，$M \Downarrow V$ であることと $(I\,M) \Downarrow V$ であることが同値となるような項 $I \in \mathsf{Term}$ の例をひとつ挙げよ.

(2) $M \Downarrow V$ をみたす $V \in \mathsf{Term}$ が存在しない項 $M \in \mathsf{Term}$ の例をひとつ挙げよ.

(3) 項 $M, V_1, V_2 \in \mathsf{Term}$ について，$M \Downarrow V_1$ と $M \Downarrow V_2$ がともに成り立つとき，V_1 と V_2 は一致することを示せ.

$\boxed{12}$ $G=(V,E)$ を有限の頂点集合 V と辺集合 E を持つ有向グラフとし，$w\colon E\to\mathbb{R}_{>0}$ を辺重みとする．ただし，$\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数全体とする．以下の条件 (I) と (II) が同値であることを示せ．

(I) G の任意の単純有向閉路 C に対して，$\prod_{e\in E(C)} w(e)\leq 1$ が成立する．ただし，$E(C)$ は C の辺集合とする．

(II) ある関数 $p\colon V\to\mathbb{R}_{>0}$ が存在して，任意の辺 $e=(u,v)\in E$ に対して，$p(u)w(e)\leq p(v)$ が成立する．

$\boxed{13}$ 有界なハミルトニアン H を持つ量子力学系を考える．そのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の完全正規直交系としてエネルギー固有状態 $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ が取れるものと仮定する．ただし, $|n\rangle$ に対するエネルギー固有値を E_n と記す．$\mathcal{H}$ 上の有界な自己共役演算子 A が与えられたとき, 任意の非負整数 k について

$$\sum_{n=0}^{\infty}(E_n-E_k)\left|\langle k\,|A|\,n\rangle\right|^2=\langle k\,|B|\,k\rangle$$

となるような $\mathcal{H}$ 上の自己共役演算子 B で A と H を用いて表されるものをひとつ求めよ．

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ Answer the following questions concerning the ring $R = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

(1) Show that R is an integral domain.

(2) Determine whether or not R is a principal ideal domain (PID).

$\boxed{2}$ Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1 + \sqrt{-3}})$. Denote by F the minimal Galois extension over $\mathbb{Q}$ containing K. Determine the Galois group $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

$\boxed{3}$ Let $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ be the general linear group of degree 2 over the finite field $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, for p an odd prime number. Find the number of subgroups H of G isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

$\boxed{4}$ We define a C^∞ differential form φ on $\mathbb{R}^2$ by

$$\varphi = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^4}.$$

We define a C^∞ submanifold of $\mathbb{R}^3$ by

$$S^2 = \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid s^2 + t^2 + u^2 = 1\}.$$

(1) We define a map $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ by

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Prove that there exists a unique C^∞ differential form ψ on S^2 such that $f^*\psi = \varphi$.

(2) Let $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ denote the inclusion map. Prove that there does not exist a C^∞ closed differential form $\tilde{\varphi}$ on $\mathbb{R}^3$ such that $(\iota \circ f)^*\tilde{\varphi} = \varphi$.

$\boxed{5}$ We define subsets U, V, W of $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ by

$$\begin{aligned} U &= \left\{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, p \neq q\right\}, \\ V &= \left\{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, q \neq r\right\}, \\ W &= \left\{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \neq p\right\}. \end{aligned}$$

(1) Compute the homology groups with integer coefficients of $X = U \cup V \cup W$.

(2) Compute the homology groups with integer coefficients of $Y = U \cap V \cap W$.

$\boxed{6}$ Let $(X, \mathcal{M}, \mu)$ be a measure space with $\mu(X) < \infty$. Let L be a positive real number. Consider the following Proposition P for μ-integrable, real-valued or complex-valued functions f on X.

Proposition P. If $\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq L\mu(A)$ for every $A \in \mathcal{M}$, then it holds that

$$|f(x)| \leq L, \quad \mu\text{-a.e. } x.$$

(1) Prove Proposition P when f is real-valued.

(2) Prove Proposition P when f is complex-valued.

$\boxed{7}$ Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $H^\infty(\mathbb{D})$ be the complex Banach space of all bounded holomorphic functions over $\mathbb{D}$, and we define the norm of $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ by

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

For each $0 < r \leq 1$, we define an operator $T_r \colon H^\infty(\mathbb{D}) \to H^\infty(\mathbb{D})$ by

$$(T_r f)(z) = \int_0^r f(tz) \, dt.$$

(1) Fix $0 < r < s < 1$. Show that there exists a continuous function

$$k \colon [0, r] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

satisfying the following condition $(*)$.

$(*)$ For every $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ and $z \in \mathbb{D}$, we have

$$(T_r f)(z) = \int_0^r \int_0^{2\pi} k(t, \theta, z) f(se^{i\theta}) \, d\theta dt.$$

Here i denotes the imaginary unit.

(2) Show that T_1 is a compact operator.

$\boxed{8}$ Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded domain with C^∞ boundary $\partial\Omega$ and let $\overline{\Omega}$ be the closure of Ω. Let $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ be the outward unit normal vector of $\partial\Omega$ at $x \in \partial\Omega$. Assume that $u \colon \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is continuous and infinitely many times differentiable in $\Omega \times (0, \infty)$, and that each partial derivative of u of any order is extendable as a bounded continuous function on $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$. Assume in addition that u satisfies the following:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0\,, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0\,, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \displaystyle\int_\Omega u(x, 0) \, dx \neq 0\,. & \end{cases}$$

Here $\Delta u = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ and $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_k} \nu_k$. Let us define $M(t), E(t)$ as follows:

$$M(t) = \int_\Omega u(x,t)\,dx\,, \qquad E(t) = \int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx\,.$$

Show the following (1), (2), (3), and (4).

(1) $M(t)$ is a constant function, i.e., $M(t)$ is independent of t.

(2) For any $t > 0$, the inequality $E(t) \leq E(0)$ holds.

(3) Set $H(t) = \log E(t)$. Then for any $t > 0$, the inequality $\frac{d^2 H}{dt^2}(t) \geq 0$ holds.

(4) For any $T > 0$ and $t \in (0, T)$, the inequality $E(t) \leq E(0)^{1-\frac{t}{T}} E(T)^{\frac{t}{T}}$ holds.

9 Let $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a C^2 function that satisfies $p(x+1) = p(x)$ and $|p'(x)| < 1$, and consider the following ordinary differential equations for $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ with respect to $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 2 - y - p'(x).$$

Answer the following questions.

(1) We consider an initial value problem with initial values $x(0) = 0$ and $y(0) = y_0$ with $y_0 \in [1, 3]$. Prove that the solution orbit in phase space (x, y) intersects with $x = 1$ at exactly one point at a finite time T.

(2) In light of the periodicity of $p(x)$, the above differential equations define a solution on the phase space $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Prove that there exists a periodic orbit of period T in this phase space as a solution to the initial value problem of (1).

(3) Define $A(t)$ as follows:

$$A(t) = \frac{y^2(t)}{2} + p(x(t)).$$

Prove, by using $A(0) = A(T)$ for any periodic orbit obtained in (2), that the periodic orbit is unique.

10 Let us consider an incompressible magneto-hydrodynamic fluid in three-dimensional space. In cartesian coordinates (x, y, z), the velocity, magnetic and pressure fields of the fluid $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{B}$, and p obey the following equations

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla \left(p + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{B}, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \beta \nabla^2 \boldsymbol{B},
\end{aligned}$$

where $\beta > 0$ is the constant magnetic diffusivity.

(1) Derive the partial differential equation for $b(x,t)$ by assuming $\boldsymbol{u} = (0, v(x,t), 0)$, $\boldsymbol{B} = (1, b(x,t), 0)$ and $p = p(x,t)$.

(2) Let us consider $b(x,t)$ for $x > 0$ when $b(0,t) = e^{-it}$ is given at $x = 0$. Assuming that $b = \hat{b}(x)e^{-it}$, and $|\hat{b}|$ is bounded as $x \to \infty$, describe $\hat{b}(x)$ and $b(x,t)$ by using the complex number α defined as follows:

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 - i\beta}, \quad \mathrm{Im}\ \alpha > 0,$$

where i denotes the imaginary unit.

(3) Calculate $f = -\dfrac{1}{|b|^2}\dfrac{d|b|^2}{dx}$, where b is as in (2).

(4) Let us consider the function f obtained in (3) as a function of β. Find the maximum of $f(\beta)$ for $0 < \beta < \infty$, and describe the behavior of $f(\beta)$.

$\boxed{11}$ Consider the set Term of terms generated by the following grammar:

$$\mathsf{Term} \ni M \ ::= \ \mathbf{K} \mid \mathbf{W} \mid (M\,M).$$

That is, Term is the smallest set such that

(i) $\mathbf{K}$ and $\mathbf{W}$ are elements of the set, and

(ii) whenever M_1 and M_2 are elements of the set, so is $(M_1\,M_2)$.

Let the evaluation relation $(\_) \Downarrow (\_) \subseteq \mathsf{Term} \times \mathsf{Term}$ be the smallest binary relation on Term satisfying the following six rules:

$$\frac{}{\mathbf{K} \Downarrow \mathbf{K}} \qquad \frac{}{\mathbf{W} \Downarrow \mathbf{W}} \qquad \frac{M \Downarrow \mathbf{K}}{(M\,N) \Downarrow (\mathbf{K}\,N)} \qquad \frac{M \Downarrow \mathbf{W}}{(M\,N) \Downarrow (\mathbf{W}\,N)}$$

$$\frac{M \Downarrow (\mathbf{K}\,L) \quad L \Downarrow V}{(M\,N) \Downarrow V} \qquad \frac{M \Downarrow (\mathbf{W}\,L) \quad ((L\,N)\,N) \Downarrow V}{(M\,N) \Downarrow V},$$

where the rule

$$\frac{A_1 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

($n \geq 0$) means that B holds whenever $A_1, \ldots, A_n$ hold. Answer the following questions.

(1) Give a term $I \in \mathsf{Term}$ such that, for any terms $M, V \in \mathsf{Term}$, $M \Downarrow V$ holds if and only if $(I\,M) \Downarrow V$ holds.

(2) Give a term $M \in \mathsf{Term}$ such that there is no $V \in \mathsf{Term}$ satisfying $M \Downarrow V$.

(3) Let M, V_1, $V_2 \in \mathsf{Term}$. Show that, if both $M \Downarrow V_1$ and $M \Downarrow V_2$ hold, then V_1 and V_2 are the same term.

$\boxed{12}$ Let $G = (V, E)$ be a directed graph with finite vertex set V and edge set E, and let $w\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$ be an edge weight, where $\mathbb{R}_{>0}$ is the set of all positive real numbers. Show that the following conditions (I) and (II) are equivalent.

(I) For any simple directed cycle C in G, $\prod_{e \in E(C)} w(e) \leq 1$ holds, where $E(C)$ is the set of edges in C.

(II) There exists a function $p\colon V \to \mathbb{R}_{>0}$ such that $p(u)w(e) \leq p(v)$ holds for any edge $e = (u, v) \in E$.

$\boxed{13}$ Consider a quantum mechanical system whose Hamiltonian H is bounded. Suppose that its Hilbert space $\mathcal{H}$ has a complete orthonormal system given by energy eigenstates $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$. We denote by E_n the energy eigenvalue corresponding to the eigenstate $|n\rangle$. Let A be a bounded self-adjoint operator on $\mathcal{H}$. Find a self-adjoint operator B on $\mathcal{H}$ given in terms of A and H satisfying

$$\sum_{n=0}^{\infty}(E_n - E_k)\left|\langle k\,|A|\,n\rangle\right|^2 = \langle k\,|B|\,k\rangle$$

for all non-negative integers k.