令和７年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2025 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎　問題は７問ある．数学系志望者は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ の６題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の５題を解答し，さらに，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ のうちの１題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は６題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって６題または７題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．
There are 7 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should answer the 6 problems $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should answer the 5 problems $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$, and also one problem from $\boxed{6}$, $\boxed{7}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 6 problems in total, and applicants to both courses should answer 6 or 7 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は 3 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 3 hours and 30 minutes.

⊗　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと．
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and the applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体の集合, 有理数の全体の集合, 実数の全体の集合, 複素数の全体の集合を表す．
In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の関数 $f(\boldsymbol{x})$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_B \frac{1}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\,d\boldsymbol{y}, \qquad B = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{y}\| < 1\}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対する $\mathbb{R}^2$ における標準内積とし，$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{x})$ は $\|\boldsymbol{x}\|$ のみに依存することを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ．

$\boxed{2}$ α を複素数とし，$A(\alpha)$ を次のような 3 次正方行列とする．

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha-1 & -2\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

このとき，$A(\alpha)$ の固有値を全て求めよ．さらに各固有値に対応する固有空間の次元を求めよ．

$\boxed{3}$ A, B を n 次複素正方行列とし，A は対角化可能であるとする．$X = AB - BA$ とおくと，$AX = XA$ が成り立つとする．このとき，X が零行列に等しいことを示せ．

$\boxed{4}$ 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の範囲を求めよ．

$\boxed{5}$ a, b を正の実数 $(a > b > 0)$ とする．次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$$

$\boxed{6}$ $[0,1]$ を単位区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ とし，K を $[0,1] \times [0,1]$ の閉部分集合とする．各 $x \in [0,1]$ に対して

$$K_x = \{y \in [0,1] \mid (x,y) \in K\}$$

とおく．任意の $x \in [0,1]$ に対して，K_x は $[0,1]$ の空ではない連結部分集合であると仮定する．以下の問に答えよ．

(1) K は $[0,1] \times [0,1]$ の連結部分集合であることを示せ.

(2) $x \in K_x$ を満たす $x \in [0,1]$ が存在することを示せ.

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2\}$ とおき, D 上の実数値関数 f を

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 - 2x + \frac{1}{3}y^3$$

と定義する．このとき，f の最大値と最小値を求めよ.

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ Let $f(\boldsymbol{x})$ be the function on $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ defined by

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_B \frac{1}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\,d\boldsymbol{y}, \qquad B = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{y}\| < 1\}.$$

Here $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ is the standard inner product of $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, and $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}}$. Answer the following questions.

(1) Show that $f(\boldsymbol{x})$ is a function depending only on $\|\boldsymbol{x}\|$.

(2) Find $f(\boldsymbol{x})$.

$\boxed{2}$ Let α be a complex number. Define a 3×3 matrix $A(\alpha)$ by

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha - 1 & -2\alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Find all the eigenvalues of $A(\alpha)$. Moreover, for each eigenvalue, find the dimension of its eigenspace.

$\boxed{3}$ Let A, B be complex $n \times n$ matrices. Put $X = AB - BA$. Assume that A is diagonalizable and $AX = XA$. Prove that X equals the zero matrix.

$\boxed{4}$ Find all real numbers α, for which the improper integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{x^\alpha}\,dx$$

converges.

$\boxed{5}$ Let a, b be positive real numbers with $a > b > 0$. Find the value of the improper integral

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\,dx.$$

$\boxed{6}$ Let $[0, 1]$ be the unit interval $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, and let K be a closed subset of $[0, 1] \times [0, 1]$. For each $x \in [0, 1]$, we set

$$K_x = \{y \in [0, 1] \mid (x, y) \in K\}.$$

We suppose that K_x is a non-empty connected subset of $[0, 1]$ for every $x \in [0, 1]$. Answer the following questions.

(1) Prove that K is a connected subset of $[0, 1] \times [0, 1]$.

(2) Prove that there exists $x \in [0, 1]$ satisfying $x \in K_x$.

$\boxed{7}$ Define a subset D of $\mathbb{R}^2$ by $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Define a function f on D by

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 - 2x + \frac{1}{3}y^3.$$

Find the maximum and minimum values of the function f.