令和６年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2024 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎　問題は 13 題ある．数学系志望者は $\boxed{1}$〜$\boxed{11}$ のうちの２題を選択して解答せよ．ただし，数学系志望者は $\boxed{9}$と$\boxed{10}$の２題を同時に選択してはならない．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{13}$のうちの２題を選択して解答せよ.（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は２題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって２〜４題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること.

There are 13 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should select and answer 2 problems out of the 11 problems $\boxed{1}$-$\boxed{11}$, but are not allowed to select $\boxed{9}$ and $\boxed{10}$ at the same time. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should select and answer 2 problems out of the 13 problems $\boxed{1}$-$\boxed{13}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 2 problems, and applicants to both courses should answer 2-4 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと.
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと.
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or personal clocks and watches during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと．
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ 有限群 Γ に対して，$|\Gamma|$ は Γ の位数，$\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ は Γ の自己同型群を表すとする．また有限群 Γ に対して，次の条件

($*_\Gamma$) $|H_1| = |H_2|$ をみたす任意の二つの部分群 $H_1, H_2 \subseteq \Gamma$ に対して，$\alpha(H_1) = H_2$ をみたす $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ が存在する．

を考える．p は素数とし，有限群 G は $(*_G)$ をみたす p 群とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) G は巡回群でないアーベル群であると仮定する．このとき，G の単位元でない元の位数は p であることを示せ．

(ii) G の中心 $Z(G)$ は条件 $(*_{Z(G)})$ をみたすことを示せ．

(iii) G はアーベル群でないと仮定する．このとき，G の位数 p の部分群が唯一つ存在することを示せ．

$\boxed{2}$ n を正の整数とする．複素数体上の 1 変数形式的べき級数環 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ の部分環 A と A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の組 $(A, \mathfrak{m})$ であって，以下のすべての条件をみたすものを一つ構成せよ．

(a) A は $\mathbb{C}$ を含み，$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![t]\!]/A) < \infty$.

(b) A の商体における A の整閉包は $\mathbb{C}[\![t]\!]$ に一致する．

(c) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

$\boxed{3}$ k は正の整数とし，$f(X) = X^6 + kX^3 + 27$ は変数 X に関する有理数係数の 1 変数多項式とする．このとき，次の条件

($*$) $f(\alpha) = 0$ をみたす任意の複素数 α に対して，$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は 6 次ガロア拡大である．

をみたす正の整数 k をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ X をコンパクトで連結な C^∞ 級 3 次元多様体とする．X 上の C^∞ 級ベクトル場 V_1, V_2, V_3 であって，次の二つの条件 (A) と (B) を満たすものが存在すると仮定する．

(A) X の各点 p において，接ベクトル $V_{1,p}, V_{2,p}, V_{3,p}$ は一次独立である．

(B) X 上の C^∞ 級関数 f, g, h が存在して

$$[V_1, V_2] = fV_3, \quad [V_1, V_3] = gV_3, \quad [V_2, V_3] = hV_3$$

を満たす.

以下の問に答えよ.

(1) X 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ が

$$\theta(V_1) = 1, \quad \theta(V_2) = \theta(V_3) = 0$$

を満たすならば，θ は閉形式であることを示せ.

(2) X の 1 次 de Rham コホモロジー群を $H^1(X)$ とする．$\dim H^1(X) \geq 2$ を示せ.

(3) $h(p) = 0$ となる点 $p \in X$ が存在することを示せ.

$\boxed{5}$ $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ とする．写像 $f \colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_3 + y_3$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) $f^{-1}(0)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $f^{-1}(1)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

$\boxed{6}$ Φ は区間 $[0,\infty)$ 上の単調増加で下に凸な連続関数であり，さらに $\Phi(0)=0$ および $\Phi(t)\geq t$ $(t\in[0,\infty))$ を満たすとする．

$$\mathcal{L}=\left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の実数値ルベーグ可測関数で，ある } \lambda>0 \text{ に対して} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \end{array} \right\}$$

と定める．また，$f\in\mathcal{L}$ に対して，

$$\|f\| = \inf\left\{ \lambda>0 \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $f\in\mathcal{L}$ のとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \leq \|f\|$ であることを示せ．

(2) $f,g\in\mathcal{L}$ とする．$f-g\in\mathcal{L}$ であることと，$\|f-g\|\leq\|f\|+\|g\|$ が成り立つことを示せ．

(3) $\mathcal{L}$ の元からなる列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ が次の性質を持つとする．

任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある正の整数 N が存在して，$m\geq N$，$n\geq N$ のとき $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$ を満たす．

このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\|f_m-f\|=0$ を満たす $\mathcal{L}$ の元 f が存在することを示せ．

$\boxed{7}$ H をヒルベルト空間とし，$H_1, H_2, \ldots$ を互いに直交する H の有限次元部分空間で，

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)^{\perp} = \{0\}$$

を満たすものとする．正の整数 n に対して P_n を H から H_n への直交射影とし，整数 $n \leq 0$ に対しては $P_n = 0$ とする．

有界線型作用素 $T\colon H \to H$ が次の 2 条件を満たすとする．

(i) $\lim_{n\to\infty} \|TP_n\| = 0$.

(ii) $a_n = \sup_{k\geq 1} \|P_{n+k}TP_k\|$ とするとき，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty.$$

ここで作用素 A に対して $\|A\|$ は A の作用素ノルムとする．

$n \in \mathbb{Z}$ に対して作用素 $S_n\colon H \to H$ を

$$S_n x = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k}TP_k x, \quad x \in H$$

と定める．

(1) $\|S_n\| \leq a_n$ を示せ．

(2) S_n はコンパクト作用素であることを示せ．

(3) T はコンパクト作用素であることを示せ．

$\boxed{8}$ C^4 級関数 $u\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x)=0$$

を満たすとし，さらに次の (i), (ii) を仮定する．

(i) $t\geq 0$ において

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|u(t,x)|,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x)\right|\quad (j=1,2,3,4),$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|$$

はすべて有限値であり，t について連続．

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(0,x)\,dx\neq 0$.

このとき，正の実数 C_1, C_2 があって，すべての $t\geq 1$ で

$$C_1 t^{-1/4}\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leq C_2 t^{-1/4}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{9}$ $\varepsilon\geqq 0$ とし，関数 $H\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を次で定義する．

$$H(x,y)=(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1).$$

また集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ を 4 点 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ を頂点とする正方形の内部領域とする．このとき，次の $\mathbb{R}^2$ 上の常微分方程式を考える．

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)-\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)H(x,y),\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)-\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)H(x,y).\end{cases}\qquad(*)$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\varepsilon=0$ とする．$(x(t),y(t))$ が $(*)$ の解ならば，$(-x(-t),y(-t))$ および $(x(-t),-y(-t))$ も $(*)$ の解となることを示せ．

(2) $\varepsilon=0$ とし，任意に $0<x_0<1$ をとる．このとき，初期値 $(x_0,0)$ に対する $(*)$ の解は周期軌道になることを示せ．

(3) $\varepsilon>0$ とし，任意に $(x_0,y_0)\in D$ をとる．このとき，初期値 (x_0,y_0) に対する $(*)$ の解の $t\to\infty$ での漸近挙動を記述せよ．

$\boxed{10}$ 上半平面 $\mathbb{H} = \{(x,y)|y > 0\}$ を流れる非圧縮性流体が，境界面 $y = 0$ の x 方向の振動により駆動される状況を考える．初期時刻 $t = 0$ において $(x,y) = (a,0)$ にある境界面上の点が時刻 $t > 0$ で $(X(a,t),0)$ にあるとする．時刻 t における流体の速度場を $\boldsymbol{u} = (u(x,y,t), v(x,y,t))$，圧力場を $p(x,y,t)$，粘性係数 μ を正の定数とすると，これらはストークス方程式

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial p}{\partial x},\\ \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

に従い，$y = 0$ での境界条件

$$u(x,0,t) = \left.\frac{\partial X(a,t)}{\partial t}\right|_{a=a(x,t)}, \quad v(x,0,t) = 0,$$

を満たす．ただし $a(x,t)$ は $x = X(a,t)$ の逆関数として与えられる．

以下の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) 流れ関数 $\psi(x,y,t)$ を

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\ , \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

となる実数値関数として導入する．流れ関数が方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\psi = 0$$

を満たすことを示せ．

(2) 境界面 $y = 0$ 上の点の運動が

$$X(a,t) = a + \epsilon\sin(ka - \omega t)$$

で与えられるとする．ここで ϵ は振幅，k は波数，ω は振動数であり，いずれも定数である．$|\epsilon|$ が十分小さいとして $\left.\dfrac{\partial X(a,t)}{\partial t}\right|_{a=a(x,t)}$ を x と t で表し $O(\epsilon^2)$ まで求めよ．

(3) 流れ関数 ψ を ϵ のべき関数として展開し，

$$\psi = \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + \cdots$$

と書く．このとき

$$\psi_1 = \Psi(y)\cos(kx - \omega t)$$

の形の解を仮定して ψ_1 を求めよ．

(4) ψ_2 を求め，流速の時間平均量

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

を $O(\epsilon^2)$ まで求めよ．ただし $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ は振動の 1 周期を表す.

$\boxed{11}$ a_0 と a_1 を整数，$c_1, c_2, \ldots$ を整数の可算無限列とする．また．任意の整数 i と j に対して，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ と定める．

このとき，以下に示すプログラムを考える．ただしプログラム中，$X \leftarrow \langle$ 式 $\rangle$ は，プログラム変数 X への $\langle$ 式 $\rangle$ の値の代入を表す.

$Z \leftarrow 1;\ M \leftarrow 0;$
while $M < 2$ **do**
  if $M = 0$ **then**
    if $c_{Z+M} = a_0$ **then** $M \leftarrow M + 1$ **else** $Z \leftarrow Z + 1$ **endif**
  else if $c_{Z+M} = a_1$ **then**
    $M \leftarrow M + 1$
  else
    $Z \leftarrow Z + 1 + \delta_{a_0 a_1};\ M \leftarrow 0$
  endif
done

このプログラムについて，以下の性質 (A) と (B) をともに満たす論理式 I を与えよ．

(A) I はプログラム中の while ループの不変条件である.

(B) $I \wedge \neg(M < 2)$ ならば,

$$(c_Z = a_0) \wedge (c_{Z+1} = a_1) \wedge \forall i.(1 \leq i < Z \Rightarrow (c_i \neq a_0 \vee c_{i+1} \neq a_1)).$$

$\boxed{12}$ $G = (V, E)$ を有限無向グラフとし，r を V の要素，k を正整数とする．また，E が k 個の辺集合 $E_1, \ldots, E_k$ に分割でき，各 E_i は G 中の全域木であるとする．$D = (V, A)$ を，G における各無向辺 $\{u, v\} \in E$ を有向辺 (u, v) もしくは (v, u) で置き換えることで得られる有向グラフとする．以下が同値であることを示せ.

(1) 任意の空でない $X \subseteq V \backslash \{r\}$ に対して，D は $V \backslash X$ から X への有向辺を k 本以上含む.

(2) D において，r の入次数は 0 であり，任意の $v \in V \backslash \{r\}$ の入次数は k である.

$\boxed{13}$ 以下の問に答えよ．

(i) 時間 $t \in \mathbb{R}$ に依存する角振動数 $\omega(t) > 0$ を持つ単位質量の一次元調和振動子を考える．古典論におけるハミルトニアンは $\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega(t)^2 q^2\right)$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ である．ただし，p は運動量，q は位置を表す．ハミルトン正準方程式の古典解 $(p(t), q(t))$ および補助微分方程式

$$\ddot{\xi}(t) + \omega(t)^2 \xi(t) = \frac{1}{\xi(t)^3}$$

の実解 $\xi(t)$ が与えられたとき，

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2}\left\{\left(\xi(t)p(t) - \dot{\xi}(t)q(t)\right)^2 + \left(\frac{q(t)}{\xi(t)}\right)^2\right\}$$

は保存量，即ち $\dot{\mathcal{I}}(t) = 0$ であることを示せ．

(ii) これより前問の量子力学版を考えることにする．$\hbar = 1,\ i = \sqrt{-1}$ とすれば，運動量演算子 P および位置演算子 Q は正準交換関係 $[Q, P] = i$ を満たす．ハミルトニアンは $H(t) = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega(t)^2 Q^2\right)$ と表せる．時間発展を記述するユニタリー演算子 $U(t)$ は

$$\dot{U}(t) = -iH(t)U(t), \quad U(0) = 1$$

を満たす．そこで $P(t) = U(t)^\dagger P(0) U(t),\ Q(t) = U(t)^\dagger Q(0) U(t),\ P(0) = P,\ Q(0) = Q$ とし，前問の $\mathcal{I}(t)$ において $p(t)$ および $q(t)$ を各々 $P(t)$ および $Q(t)$ で置き換えて得られる演算子を $I(t)$ とする．今

$$A_\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{Q(t)}{\xi(t)} \mp i\left(\xi(t)P(t) - \dot{\xi}(t)Q(t)\right)\right\}$$

とすれば，交換関係 $[A_-(t), A_+(t)] = 1$ が成り立ち，$I(t) = A_+(t)A_-(t) + \frac{1}{2}$ と表せることを示せ．

(iii) $A_\pm(t)$ が

$$\dot{A}_\pm(t) = \frac{\pm i}{\xi(t)^2} A_\pm(t)$$

を満たすことを示すことにより，$\dot{I}(t) = 0$ を確かめよ．

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ If Γ is a finite group, then we denote the order of Γ by $|\Gamma|$ and the automorphism group of Γ by $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$. Given a finite group Γ, we consider the following condition:

($*_\Gamma$) For any two subgroups $H_1, H_2 \subseteq \Gamma$ such that $|H_1| = |H_2|$, there exists $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ such that $\alpha(H_1) = H_2$.

Let p be a prime number, G a finite p-group that satisfies the condition ($*_G$). Answer the following questions.

(i) Suppose that G is an abelian group which is not a cyclic group. Then show that the order of every non-identity element of G is p.

(ii) Show that the center $Z(G)$ of G satisfies the condition ($*_{Z(G)}$).

(iii) Suppose that G is not an abelian group. Then show that there exists a unique subgroup of G of order p.

$\boxed{2}$ Let n be a positive integer. Find a pair $(A, \mathfrak{m})$ of a subring A of the ring $\mathbb{C}[\![t]\!]$ of formal power series in t over the field of complex numbers and a maximal ideal $\mathfrak{m}$ of A such that the following conditions hold.

(a) A contains $\mathbb{C}$ and $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![t]\!]/A) < \infty$.

(b) The integral closure of A in its quotient field is equal to $\mathbb{C}[\![t]\!]$.

(c) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

$\boxed{3}$ Let k be a positive integer, $f(X) = X^6 + kX^3 + 27$ a polynomial with rational coefficients in a single variable X. Find all positive integers k that satisfy the following condition:

($*$) For every complex number α that satisfies $f(\alpha) = 0$, $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ is a Galois extension of degree 6.

$\boxed{4}$ Let X be a 3-dimensional, compact and connected C^∞ manifold. Suppose that there exist C^∞ vector fields V_1, V_2, V_3 on X satisfying the following two conditions (A) and (B).

(A) The tangent vectors $V_{1,p}, V_{2,p}, V_{3,p}$ are linearly independent at every point $p \in X$.

(B) There exist C^∞ functions f, g, h on X satisfying

$$[V_1, V_2] = fV_3, \quad [V_1, V_3] = gV_3, \quad [V_2, V_3] = hV_3.$$

Answer the following questions.

(1) Suppose that a C^∞ 1-form θ on X satisfies

$$\theta(V_1) = 1, \quad \theta(V_2) = \theta(V_3) = 0.$$

Prove that θ is a closed form.

(2) Let $H^1(X)$ be the first de Rham cohomology group of X. Prove that $\dim H^1(X) \geq 2$.

(3) Prove that there exists a point $p \in X$ satisfying $h(p) = 0$.

$\boxed{5}$ Let $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Define a map $f \colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$ by

$$f\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_3 + y_3.$$

Answer the following questions.

(1) Compute the homology groups of $f^{-1}(0)$ with integer coefficients.

(2) Compute the homology groups of $f^{-1}(1)$ with integer coefficients.

$\boxed{6}$ Let Φ be a continuous and non-decreasing convex function on the interval $[0, \infty)$. Suppose further that $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(t) \geq t$ for every $t \in [0, \infty)$. Let $\mathcal{L}$ be defined as

$$\mathcal{L} = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ is a real-valued Lebesgue measurable function on } \mathbb{R} \text{ and} \\ \text{there exists } \lambda > 0 \text{ such that } \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \end{array} \right\}.$$

For $f \in \mathcal{L}$, let $\|f\|$ be defined as

$$\|f\| = \inf \left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \leq \|f\|$ for any $f \in \mathcal{L}$.

(2) Let $f, g \in \mathcal{L}$. Show that $f - g \in \mathcal{L}$ and $\|f - g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(3) Suppose that a sequence $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{L}$ satisfies the following property:

> For every $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N such that, for any $m \geq N$ and $n \geq N$, $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ holds.

Show that there exists an element f of $\mathcal{L}$ such that $\displaystyle\lim_{m \to \infty} \|f_m - f\| = 0$.

$\boxed{7}$ Let H be a Hilbert space, and let $H_1, H_2, \ldots$ be mutually orthogonal finite dimensional subspaces of H satisfying

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)^{\perp} = \{0\}.$$

For a positive integer n, we denote by P_n the orthogonal projection from H onto H_n. For an integer $n \leq 0$, we set $P_n = 0$.

Let $T\colon H \to H$ be a bounded linear operator satisfying the following conditions:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|TP_n\| = 0$.

(ii) Letting $a_n = \sup_{k\geq 1} \|P_{n+k}TP_k\|$, we have

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty.$$

Here for an operator A, we denote by $\|A\|$ the operator norm of A.

For $n \in \mathbb{Z}$, we define $S_n\colon H \to H$ by

$$S_n x = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k}TP_k x, \quad x \in H.$$

(1) Show that $\|S_n\| \leq a_n$ holds.

(2) Show that S_n is a compact operator.

(3) Show that T is a compact operator.

$\boxed{8}$ Let $u\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a C^4 function satisfying the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x)=0$$

on $(0,\infty)\times\mathbb{R}$. In addition, assume the following (i), (ii).

(i) For $t\geq 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|u(t,x)|,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x)\right|\quad (j=1,2,3,4),\ \text{and}$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|$$

are finite and continuous with respect to t.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(0,x)\,dx\neq 0$.

Prove that there exist positive real numbers C_1, C_2 such that for all $t\geq 1$ we have

$$C_1 t^{-1/4}\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leq C_2 t^{-1/4}.$$

$\boxed{9}$ Let $\varepsilon\geqq 0$, and let the function $H\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ be defined by

$$H(x,y)=(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1).$$

Let $D\subset\mathbb{R}^2$ denote the domain enclosed by the square with vertices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ and $(0,-1)$. We consider the following differential equations on $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)-\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)H(x,y),\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)-\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)H(x,y).\end{cases}\tag{$*$}$$

Answer the following questions:

(1) Let $\varepsilon=0$. Show that if $(x(t),y(t))$ is a solution of $(*)$ then $(-x(-t),y(-t))$ and $(x(-t),-y(-t))$ are also solutions of $(*)$.

(2) Let $\varepsilon=0$, and choose $0<x_0<1$. Show that the solution of $(*)$ is periodic for $(x(0),y(0))=(x_0,0)$.

(3) Let $\varepsilon>0$, and choose $(x_0,y_0)\in D$. Describe the asymptotic behavior of the solution of $(*)$ as $t\to\infty$ for $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$.

$\boxed{10}$ Let us consider an incompressible fluid in the upper plane $\mathbb{H} = \{(x, y)|y > 0\}$. Fluid motion is driven by oscillation of the boundary at $y = 0$ in the x direction. Let a point on the boundary located at $(x, y) = (a, 0)$ at the initial time $t = 0$ be located at $(X(a, t), 0)$ for $t > 0$. Velocity and pressure, $\boldsymbol{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ and $p(x, y, t)$, satisfy the following Stokes equations,

$$\begin{aligned}
\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

and the boundary condition at $y = 0$,

$$u(x, 0, t) = \left. \frac{\partial X(a, t)}{\partial t} \right|_{a=a(x,t)}, \quad v(x, 0, t) = 0,$$

where viscosity μ is a positive constant, and $a(x, t)$ is given as the inverse function of $x = X(a, t)$.

Answer the following questions (1)-(4).

(1) Let us introduce the stream function $\psi(x, y, t)$ as a real-valued function defined by

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Show that the stream function satisfies the following equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi = 0.$$

(2) Let the motion of the boundary at $y = 0$ be given by

$$X(a, t) = a + \epsilon \sin(ka - \omega t),$$

where the constants ϵ, k, and ω are the amplitude, wavenumber and frequency, respectively. Express $\left. \frac{\partial X(a, t)}{\partial t} \right|_{a=a(x,t)}$ in terms of x and t up to the order of ϵ^2.

(3) Let us expand the stream function ψ in a power function of ϵ as,

$$\psi = \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \cdots .$$

Then, obtain ψ_1 by assuming the form of

$$\psi_1 = \Psi(y) \cos(kx - \omega t).$$

(4) Evaluate the time-averaged velocity

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt$$

up to the order of ϵ^2 by calculating ψ_2. Here, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ is the period of the oscillation.

$\boxed{11}$ Let a_0, a_1 be integers, and $c_1, c_2, \ldots$ an infinite sequence of integers. For any integers i and j, define $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$.

Consider the program shown below. In the program, the expression $X \leftarrow e$ means a substitution that assigns the value of e to X.

$Z \leftarrow 1;\ M \leftarrow 0;$
while $M < 2$ **do**
  if $M = 0$ **then**
    if $c_{Z+M} = a_0$ **then** $M \leftarrow M + 1$ **else** $Z \leftarrow Z + 1$ **endif**
  else if $c_{Z+M} = a_1$ **then**
    $M \leftarrow M + 1$
  else
    $Z \leftarrow Z + 1 + \delta_{a_0 a_1};\ M \leftarrow 0$
  endif
done

For this program, give a condition I which satisfies the following properties (A) and (B).

(A) I is a loop invariant for the while loop in this program.

(B) Whenever $I \wedge \neg(M < 2)$,

$$(c_Z = a_0) \wedge (c_{Z+1} = a_1) \wedge \forall i.(1 \leq i < Z \Rightarrow (c_i \neq a_0 \vee c_{i+1} \neq a_1))$$

holds.

$\boxed{12}$ Let $G = (V, E)$ be a finite undirected graph with $r \in V$ and let k be a positive integer. Suppose that E can be partitioned into k edge sets $E_1, \ldots, E_k$ such that each E_i is the edge set of a spanning tree in G. Let $D = (V, A)$ be a directed graph that is obtained from G by replacing each undirected edge $\{u, v\} \in E$ with a directed edge (u, v) or (v, u). Show that the following are equivalent.

(1) For any nonempty $X \subseteq V \backslash \{r\}$, D contains at least k directed edges from $V \backslash X$ to X.

(2) In D, the indegree of r is 0 and, for any $v \in V \backslash \{r\}$, the indegree of v is k.

$\boxed{13}$ Answer the following questions.

(i) Consider a one-dimensional unit-mass harmonic oscillator with its angular frequency $\omega(t) > 0$ depending on time $t \in \mathbb{R}$. The Hamiltonian in classical mechanics of the oscillator is given by $\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega(t)^2 q^2\right)$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, where p and q represent momentum and position respectively. Suppose that a solution $(p(t), q(t))$ to Hamilton's canonical equations and a real solution $\xi(t)$ to the auxiliary differential equation

$$\ddot{\xi}(t) + \omega(t)^2 \xi(t) = \frac{1}{\xi(t)^3}$$

are given. Then, show that

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2}\left\{\Big(\xi(t)p(t) - \dot{\xi}(t)q(t)\Big)^2 + \left(\frac{q(t)}{\xi(t)}\right)^2\right\}$$

is conserved, namely, $\dot{\mathcal{I}}(t) = 0$.

(ii) Now we study the quantum version of the above. The momentum operator P and the position operator Q satisfy the canonical commutation relation $[Q, P] = i$ where we set $\hbar = 1$ and $i = \sqrt{-1}$. The Hamiltonian can be expressed as $H(t) = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega(t)^2 Q^2\right)$. The unitary time-evolution operator $U(t)$ satisfies

$$\dot{U}(t) = -iH(t)U(t), \quad U(0) = 1.$$

Put $P(t) = U(t)^\dagger P(0) U(t)$, $Q(t) = U(t)^\dagger Q(0) U(t)$, $P(0) = P$, $Q(0) = Q$ and let $I(t)$ be the operator obtained from $\mathcal{I}(t)$ by replacing $p(t)$ by $P(t)$ and $q(t)$ by $Q(t)$. Furthermore, let

$$A_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{Q(t)}{\xi(t)} \mp i\Big(\xi(t)P(t) - \dot{\xi}(t)Q(t)\Big)\right\}.$$

Verify the commutation relation $[A_-(t), A_+(t)] = 1$. Prove that $I(t)$ can be expressed as $I(t) = A_+(t)A_-(t) + \frac{1}{2}$.

(iii) Verify that $\dot{I}(t) = 0$ by showing that $A_\pm(t)$ satisfy

$$\dot{A}_\pm(t) = \frac{\pm i}{\xi(t)^2} A_\pm(t).$$