令和 6 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

2024 Entrance Examination (Mathematics Course/Mathematical Sciences Course)
Master's Program, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎　問題は 7 問ある．数学系志望者は $\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ の 6 題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ の 5 題を解答し，さらに，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ のうちの 1 題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 6 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 6〜7 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．
There are 7 problems. Applicants to the Mathematics Course (数学系) should answer the 6 problems $\boxed{1}$–$\boxed{6}$. Applicants to the Mathematical Sciences Course (数理解析系) should answer the 5 problems $\boxed{1}$–$\boxed{5}$, and also one problem from $\boxed{6}$, $\boxed{7}$. (Applicants to either the Mathematics Course or the Mathematical Sciences Course should only answer 6 problems in total, and applicants to both courses should answer 6-7 problems in total, depending on their choices.) Write the problem numbers you choose on the selection sheet.

◎　解答時間は 3 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 3 hours and 30 minutes.

⊗　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculator, cell phones, information devices or personal watches/clocks during the examination. Such materials and devices must be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題文を見ないこと.
   Do not look at the problems until it is permitted by the proctor.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
   Write your name and the applicant number on each answer sheet and each draft/calculation sheet.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
   Use a separate answer sheet for each problem and, on each sheet, write the number of the problem being attempted within the box.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to an additional answer sheet (or more). If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
   When handing in your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (ordered by problem number), followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half, with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体の集合, 有理数の全体の集合, 実数の全体の集合, 複素数の全体の集合を表す.
In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English translation follows.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + 2y^2\}$$

で定める．積分

$$\iint_D xy\, e^{1-x^2-y^2}\, dxdy$$

の値を求めよ．

$\boxed{2}$ a を複素数とし，複素 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 2a & -2a & a+1 \end{pmatrix}$$

と定める．行列 A の固有値をすべて求めよ．また，A の階数を求めよ．

$\boxed{3}$ n, m を $n \geq 2m$ を満たす正の整数とする．V を有限次元複素ベクトル空間とする．$f \colon V \to V$ を $f^n = f^m$ を満たす線形写像とする．このとき，

$$V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$$

を示せ．ここで，$\mathrm{Ker}(f^m)$ は f^m の核であり，$\mathrm{Im}(f^m)$ は f^m の像である．

$\boxed{4}$ r を正の実数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $\rho_r(x)$ を

$$\rho_r(x) = \sin\left(re^{-r^2x^2}\right)$$

と定義する．$\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数 $f(x)$ に対し，次の問に答えよ．

(1) 任意の $r > 0$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx$ が収束することを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx = 0$ を示せ．

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能で $f(0) = 0$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx = 0$ を示せ．

$\boxed{5}$　a を正の実数とする．次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}\, dx$$

$\boxed{6}$　S^2 は 2 次元球面 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ を表すこととする．写像 $f = (f_1, f_2, f_3)\colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

により定める．この写像の臨界値をすべて求めよ．ただし $q \in \mathbb{R}^3$ が f の臨界値であるとは，ある点 $p \in S^2 \times S^2$ が存在して $f(p) = q$ であり，点 p のまわりの $S^2 \times S^2$ の局所座標系 (u_1, u_2, u_3, u_4) に関する f のヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p) \right)_{1 \leq i \leq 3,\, 1 \leq j \leq 4}$$

の階数が 2 以下となることである．

$\boxed{7}$　n を正の整数とする．複素 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ を行列の和とスカラー倍により複素ベクトル空間とみなす．対角行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，ある $B \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して

$$\left\{ A^i B^j \in M_n(\mathbb{C}) \mid i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$

が $M_n(\mathbb{C})$ の基底となることを示せ．ただし $A^0 = B^0 = E$（単位行列）とする．

The English translation starts here.

$\boxed{1}$ Define a subset D of $\mathbb{R}^2$ by

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + 2y^2\}.$$

Find the value of the integral

$$\iint_D xy\, e^{1-x^2-y^2}\, dxdy.$$

$\boxed{2}$ Let a be a complex number. Define a complex 3×3 matrix A by

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 2a & -2a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Find all the eigenvalues of A and the rank of A.

$\boxed{3}$ Let n, m be positive integers satisfying $n \geq 2m$. Let V be a finite dimensional $\mathbb{C}$-vector space. Let $f \colon V \to V$ be a linear map satisfying $f^n = f^m$. Prove that

$$V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m).$$

Here $\mathrm{Ker}(f^m)$ is the kernel of f^m and $\mathrm{Im}(f^m)$ is the image of f^m.

$\boxed{4}$ Let r be a positive real number and define a function $\rho_r(x)$ on $\mathbb{R}$ by

$$\rho_r(x) = \sin\left(re^{-r^2x^2}\right).$$

For a bounded continuous real-valued function $f(x)$ on $\mathbb{R}$, answer the following questions.

(1) For any $r > 0$, show that the improper integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx$ converges.

(2) Show that $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx = 0$.

(3) Suppose that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$ and that $f(0) = 0$. Show that $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)\, dx = 0$.

$\boxed{5}$ Let a be a positive real number. Find the value of the following improper integral.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}\, dx.$$

$\boxed{6}$ Let S^2 be the 2-dimensional sphere $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Define a map $f = (f_1, f_2, f_3)\colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ by

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Find all critical values of f. Here we say that $q \in \mathbb{R}^3$ is a critical value of f if there exists $p \in S^2 \times S^2$ such that $f(p) = q$ and that, for a local coordinate system (u_1, u_2, u_3, u_4) on $S^2 \times S^2$ around p, the Jacobian matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p) \right)_{1 \le i \le 3,\, 1 \le j \le 4}$$

has rank less than or equal to 2.

$\boxed{7}$ Let n be a positive integer. Let $M_n(\mathbb{C})$ be the set of $n \times n$ complex square matrices, seen as a complex vector space with matrix addition and scalar multiplication. Define the diagonal matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Prove that there is $B \in M_n(\mathbb{C})$ such that

$$\left\{ A^i B^j \in M_n(\mathbb{C}) \mid i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$

forms a basis for $M_n(\mathbb{C})$, where $A^0 = B^0 = E$ (the unit matrix).