第9回白浜研究集会

開催期間:2018年1月15日(月)から1月18日(木)

開催場所:白浜御苑

プログラム

1月15日(月)

14:50-15:00 開会の挨拶

15:00-15:40 佐野 めぐみ (大阪市立大学 理学研究科 D3) 4 次元におけるシャープ臨界 Rellich 不等式について

15:50-16:30 清水 一慶(京都大学大学院 理学研究科 M2) Schrödinger map の局所適切性について

16:40-17:00(SC) 山中 祥五 (京都大学大学院 情報学研究科 D1) ハミルトン系における横断的なヘテロクリニック軌道と非可積分性

1月16日(火)

09:30-10:10 ・ 寺本 有花 (九州大学 数理学府 D1)

On the spectrum of linear artificial compressible system

10:20-11:00 石川 寿雄 (京都大学大学院 理学研究科 D1) 多重並列ミニマル平面 Couette 乱流に対する Lyapunov 解析

11:10-11:50 豊田 洋平(大阪大学大学院 基礎工学研究科 D2) 2 次元点渦系平均場方程式の爆発解の挙動について

昼食

14:00-14:40 世良 透 (京都大学大学院 理学研究科 M2) エルゴード理論に関する一般化逆正弦法則

14:50-15:30 森 隆大 (京都大学 理学研究科 M2)

Large deviations for intersection measures of some Markov processes

Tea Time (20分)

15:50-16:10(SC) 野場 啓(京都大学大学院 理学研究科 D2)

On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes

- 16:10-16:30(SC) 山田 淳二 (京都大学大学院 情報学研究科 M1) 2 次斉次ポテンシャル系の非可積分性について
- 16:40-17:00(SC) 本永 翔也(京都大学大学院 情報学研究科 M1) パラメトリック励振を受ける非線形振動子の非可積分性

1月17日(水)

- 09:30-10:10 伊縫 寛治 (京都大学大学院 人間・環境学研究科 D1) Sierpinski gasket 上のエネルギー密度関数の不連続性
- 10:20-11:00 浜口 雄史 (京都大学大学院 理学研究科 M2)
 Large financial market における無裁定理論
- 11:10-11:50 渡邉 天鵬 (大阪大学大学院 理学研究科 M2) マルコフ的なランダム力学系

昼食

14:00-14:40 佐川 侑司(大阪大学大学院 理学研究科 D2)

Lifespan of small solutions to the Schrödinger equation with a subcritical nonlinearity

14:50-15:30 石川 歩惟 (神戸大学大学院 システム情報学研究科 D1) Lie 群上の変分原理に基づくエネルギー保存数値解

Tea Time (20 分)

15:50-16:10(SC) 清水 雄貴 (京都大学大学院 理学研究科 M2)トーラス幾何による N 点渦環の安定化

16:10-16:30(SC) | 養島 淳 (京都大学大学院 理学研究科 M2) | Bose-Einstein 凝縮の厳密な導出

16:40-17:00(SC) 機井 涼 (京都大学大学院 理学研究科 M1) U^p-V^p spaces とその KP-II 方程式への応用

1月18日(木)

09:50-10:30 馬越 春樹 (大阪大学大学院 基礎工学研究科 D2) 可逆な化学反応を記述する反応拡散方程式系の解の漸近挙動

10:40-11:20 川越 大輔(京都大学大学院 情報学研究科 D3)

Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radi ative transfer and its application to the optical tomography

11:20-11:30 閉会の挨拶

(SC:ショートコミュニケーション)

4次元におけるシャープ臨界 Rellich 不等式について

佐野 めぐみ* 大阪市立大学 大学院理学研究科

キーワード: Hardy の不等式, 非コンパクト現象, 臨界ソボレフ空間, 最小化問題

導入と主結果

1階のソボレフ空間 $W_0^{1,p}(p \le N)$ においては Sobolev 不等式,Hardy 不等式,Trudinger-Moser 不等式 等「不等式の成立・不成立」また「最良定数の値」,そして最良定数に付随した最小化問題の「最小化元の存在・非存在 (不等式の言葉では等号成立・不成立)」に関して非常によく研究が成されている。このような不等式に関する研究を行うことで,楕円型方程式の解の存在・非存在や放物型方程式の時間大域的挙動等の研究へ役立てることができる。このように不等式は偏微分方程式を解析する際の重要な "道具"という面もあるが,一方で不等式自身からも様々な現象が観測でき,それ自体が大変興味深い。本講演では 2 階のソボレフ空間 $W_0^{2,p}$,特に臨界の場合 2p=N を扱いたい.具体的には,臨界 Hardy 不等式の 2 階への一般化である臨界 Rellich 不等式の最良定数に付随した次の最小化問題 (1) の「正値性 (i.e. 不等式の成立・不成立),最良定数の値,最小化元の存在・非存在」について考える.

$$R_{\gamma} := \inf_{u \in W_0^{2,\frac{N}{2}}(\Omega) \setminus \{0\}} F(u), \quad \text{ただし } F(u) := \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^{\frac{N}{2}} dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^{\frac{N}{2}}}{|x|^N (\log \frac{aR}{|x|})^{\gamma}} dx}$$
とする. (1)

 Ω は \mathbb{R}^N の滑らかな有界領域, $0 \in \Omega$, $R := \sup_{x \in \Omega} |x|$, $a \geq 1, \gamma > 1$ とする.ここで,ポテンシャル関数 $f_{a,\gamma}(x) := |x|^{-N} (\log \frac{aR}{|x|})^{-\gamma}$ は a と γ によって形状や特異性の強さが変化するという事に注意する.具体的には a > 1 の場合, $f_{a,\gamma}$ は原点にのみ特異性をもつのに対して,a = 1 の場合は,原点だけでなく境界の一部 $\partial\Omega \cap \partial B_R(0)$ にも特異性をもつ.さらに γ は $f_{a,\gamma}$ の特異性の強さを表しており, γ が大きいほど原点での特異性は弱くなるのに対し,a = 1 のときは γ が大きいほど境界での特異性は強くなる.さらに $a \gg 1$ のときには,ポテンシャル関数 $f_{a,\gamma}$ は球対称減少関数となり,Talenti の比較原理等を使用することで,既に最小化問題(1)に関して様々な結果が得られている([1] 等参照).本講演では N = 4 の場合のみであるが,シャープな場合 a = 1 に関して得られた結果 (定理 1) を紹介する.

定理 1. (S.-Takahashi, in preparation) N=4,~a=1 とする. 次の (i) \sim (iii) が成立する.

- (i) $R_{\gamma} > 0 \stackrel{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} 2 \le \gamma \le 4$.
- (ii) 2 < γ < 4 ならば, R_{γ} は達成される.
- (iii) $R_2 = 1$ と $R_4 = \frac{9}{16}$ は共に達成されない.

参考文献

[1] Detalla, A., Horiuchi, T., Ando, H., *Missing terms in Hardy-Sobolev inequalities*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 80 (2004), no. 8, 160-165.

^{*}megumisano0609@gmail.com

Schrödinger mapの局所適切性について

清水 一慶* 京都大学大学院理学研究科数学教室

キーワード: Schrödinger map, 局所適切性

本講演では2次元球面 \mathbb{S}^2 を target とする Schrödinger map の初期値問題を扱う:

$$\partial_t u = u \times \Delta u$$
 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u(0, x) = u_0(x)$ in \mathbb{R}^n .

ここで $\mathbb{S}^2=\{y\in\mathbb{R}^3:|y|=1\},\ u={}^t(u_1,u_2,u_3)$ を未知関数とし、 \times は \mathbb{R}^3 の元のベクトル積を表す。n=1 のときは渦糸が満たす方程式と密接に関係しており、n=2 のときは強磁性体の現象を記述する Heisenberg モデルにおいて磁化ベクトルが満たす方程式として知られている。

本講演ではn=2の場合を考え、u が m-equivariance と呼ばれる特別な形をもつ場合に 焦点を当てる.ここで $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し写像 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2$ が m-equivariant であるとは、u が 次の形で表されることを指す.

$$u(x) = e^{m\theta R}v(r), \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし (r,θ) は x の極座標, v は $(0,\infty)$ から \mathbb{S}^2 への写像である. Schrödinger map は m-equivariance を保つので,我々は解をこのクラスに制限して考察することができる. 関数空間を

$$\Sigma_m := \left\{ u = e^{m\theta R} v(r) \mid u \in \dot{H}^1, \lim_{r \to 0} v(r) = -\vec{k}, \lim_{r \to \infty} v(r) = \vec{k} \right\}$$

と設定すると、 Σ_m は調和写像と呼ばれる Schrödinger map の定常解の族

$$\mathcal{O}_m = \left\{ e^{(m\theta + \alpha)R} Q\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \mid s > 0, \ \theta \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}$$

を持つ. ただし, $Q(r)={}^t(h_1(r),0,h_3(r)),\,h_1(r)=\frac{2r^m}{r^{2m}+1},\,h_3(r)=\frac{r^{2m}-1}{r^{2m}+1}$ である.

Gustafson et al. [1] は \mathcal{O}_m の漸近安定性を調べる目的で、初期値 u_0 が \mathcal{O}_m に十分近い場合において Schrödinger map の局所適切性を与えている。しかしその証明にいくつか不備が確認され、その修正および補完が必要であった。そこで本講演では Gustafson et al. の議論を解説しながら不完全な点を提示し、これらが部分的に解決されたことを報告する。またこれに関連して、Schrödinger map の局所適切性に関する既存の結果をいくつか紹介する予定である。

参考文献

[1] S. Gustafson, K. Kang, and T.-P. Tsai, Asymptotic stability of harmonic maps under the Schrödinger flow, Duke Math. J. 145 (2008).

^{*}ishimizu@math.kyoto-u.ac.jp

ハミルトン系における横断的なヘテロクリニック軌 道と非可積分性

山中 祥五* 京都大学 情報学研究科

キーワード:力学系、非可積分判定、カオス

概要

微分方程式の非可積分性を判定する方法はいくつか知られている。例えば、変分方程式の微分ガロア群の単位成分が非可換ならば、微分方程式は非可積分である。一方、非可積分であったとしても微分方程式の解がカオス的であることを意味しない。そこで、非可積分であるための条件とカオスであるための条件の関係を調べることは重要な問題である。本発表では以下の2自由度ハミルトン系を考える。

$$\dot{x} = JD_x H(x, y), \quad \dot{y} = JD_y H(x, y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$
 (1)

x 平面が不変であり、その不変平面上に 2 つのサドルセンター型の平衡点 $(x_{\pm},0)$ とそれらをつなぐヘテロクリニック軌道があることを仮定する。さらにいくつかの仮定をおく。リヤプノフの中心定理により、 $(x_{\pm},0)$ に漸近する周期軌道の族 $\{\gamma_{\pm}^{\alpha^{\pm}}\}_{\alpha^{\pm}\geq 0}$ が存在する。このとき、変分方程式の微分ガロア群の単位成分の非可換ならば、同じエネルギー曲面上の周期軌道 $\gamma_{\pm}^{\alpha^{\pm}}$ の安定多様体 $W^{s}(\gamma_{+}^{\alpha^{+}})$ と不安定多様体 $W^{u}(\gamma_{-}^{\alpha^{-}})$ が横断的に交差することが分かった。(図 1 を見よ。)言い換えれば,非可積分であるための十分条件が成り立つとき、解が複雑であることが分かる。

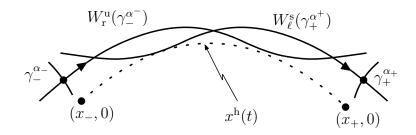


図 1: 横断的に交差する安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha^+})$ と不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha^-})$

^{*}s.yamanaka@amp.i.kyoto-u.ac.jp

On the spectrum of linear artificial compressible system

寺本 有花* 九州大学 大学院 数理学府

キーワード: 非圧縮 Navier-Stokes 方程式, 人工圧縮系, Taylor 渦

 \mathbb{R}^n の滑らかな境界をもつ有界領域 Ω において次の人工圧縮系を考える.

$$\epsilon^2 \partial_t p + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{g}, \tag{2}$$

$$v|_{\partial\Omega} = v_*.$$
 (3)

ここで $\mathbf{v} = {}^{\top}(v^1(x,t),\cdots,v^n(x,t)), p = p(x,t)$ は,位置 $x \in \Omega$,時刻 $t \geq 0$ における流速ベクトル,圧力を表し, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x)$ は与えられた外力, \mathbf{v}_* は $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ を満たす与えられた境界データである。 ν は粘性係数であり,正定数であるとする。(1) における $\epsilon > 0$ は小さいパラーメータ(人工マッハ数)である。 $\epsilon = 0$ の極限で非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (1)- $(3)|_{\epsilon=0}$ が得られるが,この極限は特異極限である。人工圧縮系 (1)- $(3)|_{\epsilon>0}$ は非圧縮流の数値計算において用いられている。

容易にわかるように人工圧縮系の定常解の集合と非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解の集合は同一のものである。この講演では, $\epsilon>0$ が十分小さいときに,人工圧縮系の定常解と非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解の安定性の関係を考察する.

定理 1. ([1]) ある正定数 δ_0 が存在して次のことが成り立つ. $u_s=(p_s, \boldsymbol{v}_s)$ が非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (1)-(3)| $_{\epsilon=0}$ の安定な定常解であり,

$$\inf_{\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)^n, \boldsymbol{w}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\operatorname{Re}\left((\mathbb{Q}\boldsymbol{w})\cdot \nabla \boldsymbol{v}_s, \mathbb{Q}\boldsymbol{w}\right)_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla \mathbb{Q}\boldsymbol{w}\|_{L^2(\Omega)}^2} \geq -\delta_0, \tag{4}$$

ならば、十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $u_s = (p_s, \boldsymbol{v}_s)$ は人工圧縮系 (1)- $(3)|_{\epsilon>0}$ の解としても安定である.ここで、 $\mathbb{Q} = I - \mathbb{P}$ であり、 $\mathbb{P}: L^2(\Omega)^n \to L^2_{\sigma}(\Omega)$ は Helmholtz 射影である.ただし, $L^2_{\sigma}(\Omega) = \{ \boldsymbol{w} \in L^2(\Omega)^n; \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}.$

講演では(4)をみたす例として回転同軸円柱間の Taylor 渦を考える.

参考文献

[1] Y. Kagei, T. Nishida and Y. Teramoto, On the spectrum for the artificial compressible system, to appear in J. Differential Equations.

^{*}y-teramoto@math.kyushu-u.ac.jp

多重並列ミニマル平面 Couette 乱流に対する Lyapunov 解析

石川 寿雄* 京都大学 理学研究科

キーワード:応用数理,流体力学,乱流遷移,安定性,Lyapunov 解析

背景・動機・結果

平面 Couette 流の乱流遷移過程では、乱流領域が流れ方向に対して角度を持ったストライプパターンを成すことが実験的 [1]・数値的 [2] に知られている。本研究では Lyapunov 解析を用いてストライプパターンの形成メカニズムの解明を試みる。

一方, 乱流が維持される最小の領域サイズである最小流れ単位 (Minimal Flow Unit, 以下 MFU) [3], [4] における平面 Couette 乱流は Lyapunov 解析 [5] を含む様々な力学系の手法によって性質が明らかにされてきた. しかし, ストライプパターンの空間スケールは MFU より非常に大きいため, ストライプパターンが形成される領域サイズに対して Lyapunov 解析を適用することは膨大な計算資源を必要とし, 事実上不可能である.

そこで本研究では、大きな領域における乱流の代わりに、MFU を水平方向に多数並べた 多重並列領域における乱流を対象に Lyapunov 解析を行った. この設定の下では、Bloch の 定理を適用することで、Lyapunov 解析が MFU 領域上の計算で実行可能となる.

計算の結果,最も大きな Lyapunov 指数を持つモードは流れ方向に対して平行な Bloch 波数を持っており,ストライプパターンのような斜め方向とは異なることが分かった. 斜め 方向のパターンを示すためには, MFU より広い領域でのダイナミクスや, Lyapunov 解析の範疇ではないモード間の非線形相互作用が重要であることが示唆される.

- [1] A. Prigent, G. Grégoire, H. Chaté & O. Dauchot. Long-wavelength modulation of turbulent shear flows, Physica D 174 (2003) 100-113.
- [2] Y. Duguet, P. Schlatter & D. S. Henningson. Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow, J. Fluid Mech. (2010), vol. 650, pp. 119-129.
- [3] J. Jiménez & P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence, J. Fluid Mech. (1991), vol. 225, pp. 213-240.
- [4] J. M. Hamilton, J. Kim & F. Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structure, J. Fluid Mech. (1995), vol. 287, pp. 317-348.
- [5] M. Inubushi, S. Takehiro & M. Yamada. Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence, Phys. Rev. E., 92, 023022 (2015).

^{*}toshio@kurims.kyoto-u.ac.jp

2次元点渦系平均場方程式の爆発解の挙動について

豊田 洋平* 大阪大学 基礎工学研究科

キーワード: 楕円型偏微分方程式, 爆発解析

本講演は大阪大学 (MMDS) の鈴木貴氏との共同研究に基づく. 次の半線形楕円型方程式の Dirichlet 境界問題を考える:

$$-\Delta v = \lambda \int_{I_{+}} \frac{\alpha e^{\alpha v}}{\int_{\Omega} e^{\alpha v} dx} \mathcal{P}(d\alpha) \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{1}$$

ただし, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし, $\lambda>0$ は定数で, $\mathcal{P}(d\alpha)$ は $I_+:=[0,+1]$ 上で定義されたボレル確率測度とする. 方程式 (1) は 2 次元完全流体の渦度場の定常 状態を表す方程式で, 特に渦度分布を点渦系モデルで考えた際に導出される平均場方程式である [1,2].

方程式(1)には2つの重要な構造を持つ.1つは変分構造である.実際,汎関数

$$J_{\lambda}(v) := \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{2}^{2} - \lambda \int_{I_{+}} \log \left(\int_{\Omega} e^{\alpha v} dx \right) \mathcal{P}(d\alpha), \quad v \in H_{0}^{1}(\Omega),$$

を定義すると、方程式 (1) は汎関数 $J_{\lambda}(\cdot)$ のオイラー・ラグランジュ方程式となる.方程式 (1) の解の存在・非存在を議論する上で汎関数 J_{λ} の下からの有界性は重要である.ここで、

$$\overline{\lambda} := \sup \left\{ \lambda > 0 \mid \inf_{v \in H^1_{\lambda}(\Omega)} J_{\lambda}(v) > -\infty \right\}$$
 (2)

とおくと、汎関数 $J_{\lambda}(\cdot)$ の最小化列 (λ_k, v_k) が定義できる、すなわち (λ_k, v_k) は下から $\lambda_k \uparrow \overline{\lambda}$ となる (1) の解の列である。本講演ではこの最小化列が爆発する場合にその爆発挙動を示す評価式を導出する。 つまり

$$\lambda_k \to \overline{\lambda}, \quad \|v_k\|_{L^{\infty}(\Omega)} \to +\infty$$
 (3)

を仮定する. 本講演では(3)のことを最小化列の爆発と呼ぶ.

爆発挙動を示す上で欠かせないのが方程式 (1) のスケール不変性である. これが方程式 (1) のもつ 2 つ目の重要な性質である. 方程式のスケール不変性とは、解の取りうる値と解の従属変数を適当に拡大縮小するような変換に対して方程式の構造が不変であることを指す. 具体的な変換については本誌では割愛するが, 講演では爆発する最小化列に対してスケール変換を用いて, 爆発挙動に関する結果を証明する.

- [1] L. Onserger, Statistical hydrodynamics, Suppl. Nuovo Cimento 6 (1949) 279-287.
- [2] K. Sawada, T. Suzuki, Derivation of the equilibrium mean field equations of point vortex and vortex flament system, Theoretical and Applied Mechanics Japan 56 (2008) 285-290.

^{*}y-toyota@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

無限測度を保つエルゴード変換に対する逆正弦法則

世良 透* 京都大学 理学研究科 M2

キーワード:エルゴード理論,確率論,逆正弦法則,1次元力学系

1 動機(の一つ)

X を完備可分距離空間, μ を X 上の σ -有限測度, $T: X \to X$ を μ を保存するエルゴード変換とする.もし $\mu(X) < \infty$ ならば,次が成り立つ (Birkhoff の個別エルゴード定理):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} \xrightarrow[n \to \infty]{\mu-\text{a.e.}} \frac{\mu}{\mu(X)}, \quad \text{in } \mathcal{P}(X).$$

ただし δ_x は x における Dirac 測度であり, $\mathcal{P}(X)$ は X 上の確率測度全体の空間で,弱位相が備わっている.言い換えると,軌道 $(T^kx)_{k\geq 0}$ が通る点を数え上げて長時間平均を取ると,x に依らずに定常状態 $\mu/\mu(X)$ に収束していく.では $\mu(X)=\infty$ の時にも何か非自明な収束が見出だせるであろうか?

2 Boole 変換に対する逆正弦法則

具体例で説明しよう. $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $Tx:=x-x^{-1}$ で定める. これは Boole 変換と呼ばれており、Lebesgue 測度 dx を保存するエルゴード変換であることが知られている. Thaler(2002) は次の逆正弦法則を示した: $\nu(dx)\ll dx$ を満たす任意の $\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} \text{ under } \nu(dx) \xrightarrow[n \to \infty]{d} \sum_{\pm} A_{\pm} \delta_{\pm \infty}, \text{ in } \mathcal{P}([-\infty, \infty]).$$

ここで $\stackrel{ ext{d}}{\longrightarrow}$ は分布収束を意味し, A_\pm は原点出発 1 次元 Brown 運動 $(B_t)_{t\geq 0}$ の時刻 1 までの正側/負側滞在時間である:

$$A_{+} := \int_{0}^{1} \mathbb{1}\{B_{s} > 0\}ds, \quad A_{-} := \int_{0}^{1} \mathbb{1}\{B_{s} < 0\}ds,$$

言い換えると、軌道 $(T^kx)_{k\geq 0}$ が通る点は無限遠点 $\pm\infty$ の近傍に集中し、かつ初期分布 $\nu(dx)$ の下でその重みは A_\pm で与えられる.上記の収束を逆正弦法則と呼ぶ理由は、 A_\pm が逆正弦分布に従う、すなわち

$$\mathbb{P}[A_{\pm} \le t] = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0,1],$$

が成り立つためである (Lévy の逆正弦法則). 本講演では、このような無限測度を保つエルゴード変換に対する逆正弦法則とその一般化について紹介する.

^{*}sera@math.kyoto-u.ac.jp

Large deviations for intersection measures of some Markov processes

森 隆大* (京都大学 数理解析研究所 M2)

キーワード:ディリクレ形式,ランダム測度,大偏差原理

 $S^{(1)},\cdots,S^{(p)}$ を \mathbb{Z}^d 上の独立な単純ランダムウォークとし、それらの軌跡が時刻 N までに $A\subset\mathbb{Z}^d$ 内で交差した回数を

$$\ell_N^{\mathrm{IS}}(A) := \sum_{x \in A} \sum_{n_1, \dots, n_p = 0}^N 1_{\{x = S^{(1)}(n_1)\}} \dots 1_{\{x = S^{(p)}(n_p)\}}$$

で定める. 同様に, $B^{(1)},\cdots,B^{(p)}$ を \mathbb{R}^d 上のブラウン運動 (BM) とし, それらの軌跡が時刻 t までに $A\subset\mathbb{R}^d$ 内で交差した時間を (形式的に)

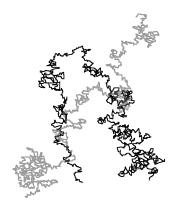
$$\ell_t^{\text{IS}}(A)$$
 " =" $\int_A \int_{[0,t]^p} \delta_x(B^{(1)}(s_1)) \cdots \delta_x(B^{(p)}(s_p)) ds_1 \cdots ds_p dx$

で定め、このランダム測度をブラウン運動の intersection measure (交差測度) と呼ぶ.

講演者は、測度距離空間上の確率過程に対して intersection measure を構成し、また時刻無限大での極限定理 (大偏差原理) を証明した。この結果は、滑らかな境界を持つ有界領域から脱出するまでの BM に対する intersection measure の大偏差原理を示した [König, Mukherjee, '13] の手法に Dirichlet 形式の議論を組み合わせることで得られたものである.

これらの結果により、例えば次のような空間と確率過程に対し intersection measure が解析できるようになった:

- Ricci 曲率が下に有界なコンパクト連結 Riemann 多様体上の BM (上と同様な状況では, $RCD^*(K, N), K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ 空間上の BM も例に含まれる.)
- Sierpiński のギャスケット (図 2) 上の BM
- Sierpiński のギャスケット上の stable-like processes (≒ ジャンプのある確率過程)





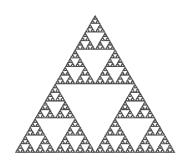


図 2: Sierpiński のギャスケット

参考文献

[KM13] Wolfgang König and Chiranjib Mukherjee. Large deviations for Brownian intersection measures. Comm. Pure Appl. Math., 66(2):263-306, 2013.

^{*}tmori@kurims.kyoto-u.ac.jp

負スペクトル Lévy 過程における Poisson 的配当の最適化問題

野場 啓* 京都大学大学院 理学研究科

キーワード: Lévy 過程,配当最適化問題

概要

本講演は、José-Luis Pérez 氏 (CIMAT)、山崎和俊氏 (関西大学)、矢野孝次氏 (京都大学)との共同研究である [3] に基づいたものであり、負スペクトル Lévy 過程における Poisson 的配当の最適化問題について報告する。Poisson 的配当とは、Poisson 過程の到着時刻ごとに、保険会社が配当金を支払う戦略を指す。ここでは、負スペクトル Lévy 過程を保険会社の剰余金のモデルとした場合に、de Finetti 配当問題の最適戦略、すなわち割引配当金を最大化する戦略が、パリジャン反射、すなわち予め指定したレベルの超過分を配当する戦略、で与えられることを示す。正スペクトルの場合の Poisson 的配当最適化問題は [4] で扱われており、結果と基本方針は類似しているが、詳細はかなり異なる。また、負スペクトルの場合のde Finetti 配当最適化問題の先行研究として [2] と [1] がある。

- [1] A. E. Kyprianou, R. L. Loeffen and J. L. Pérez. Optimal control with absolutely continuous strategies for spectrally negative Lévy processes. J. Appl. Probab. 49 (2012), no. 1, 150-166.
- [2] R. L. Loeffen. On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes. Ann. Appl. Probab. 18 (2008), no. 5, 1669-1680.
- [3] K. Noba, J. L. Pérez, K. Yamazaki and K. Yano. On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes. arXiv:1708.01678.
- [4] J. L. Pérez and K. Yamazaki. On the optimality of Periodic barrier strategies for a spectrally positive Lévy process. arXiv:1604.07718.
- [5] J. L. Pérez and K. Yamazaki. Mixed Periodic-classical barrier strategies for Lévy risk processes. arXiv:1609.01671.

^{*}knoba@math.kyoto-u.ac.jp

-2次斉次ポテンシャル系の非可積分性について

山田 淳二* 京都大学 情報学研究科

キーワード:可積分判定,ハミルトン力学系,ポテンシャル系

ハミルトニアンHに支配されるn自由度ハミルトン系に対して、包合系をなす関数的に独立なn個の保存量 $F_1=H,\ F_2,\cdots,F_n$ が存在するとき、そのハミルトン系は可積分であるという。

与えられたハミルトン系が可積分であるか否かを判定することは重要な問題であり、現在まで様々な方面から研究が進められてきている。特に、系が可積分であれば、その特解周りの変分方程式の微分ガロア群について、その単位成分は可換である[1]という事実を用いることにより、可積分判定の一つの強力な手法が得られている。

次数 $\beta \in \mathbb{Z}$ の斉次ポテンシャルを有するハミルトニアン:

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{p}\|^2 + U(\boldsymbol{q}) \qquad ((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$
 $U(\lambda \boldsymbol{q}) = \lambda^{\beta} U(\boldsymbol{q}) \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \ \lambda > 0)$

が支配するハミルトン系は β 次斉次ポテンシャル系と呼ばれ、直線解と呼ばれる特解が存在することが知られている。この特解周りの変分方程式に注目して上の可積分判定の手法を適用することにより、ほとんどの次数に対しては、限られた場合でしか可積分になり得ないという結果が、[2] をはじめとする研究により知られていた。

その一方で、次数 $\beta = -2$ の場合については、非可積分に関する結果が得られていなかった。そこで、直線解とは異なる種類の特解に注目し、その変分方程式を考察することによって、系の非可積分性に対する条件を導くことが出来る。

本発表では、-2次斉次ポテンシャル系における非可積分性の判定の概要を説明し、一つの応用として、ある種の三体問題と等価である系[3]の非可積分性についても触れる.

- [1] J.J. Morales-Ruis, *Picard-Vessiot theory and integrability*. J. Geom. Phys. 87 (2015), 314-343.
- [2] J.J. Morales-Ruis, J.P. Ramis, A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential., Methods Appl. Anal. 8 (2001), 1, 113-120.
- [3] The three-body problem and equivariant Riemannian geometry. J. Math. Phys. 58 (2017), 8

^{*}yjunji@amp.i.kyoto-u.ac.jp

パラメトリック励振を受ける非線形振動子の 非可積分性

本永 翔也* 京都大学 情報学研究科

キーワード:可積分判定,連続力学系,非線形振動子

概要

パラメトリック励振を受ける非線形振動子を考える:

 $\ddot{x}+\varphi(x,\dot{x},\cos\omega t,\sin\omega t)\dot{x}+(\beta+\gamma\cos\omega t)x+\psi(x,\dot{x},\cos\omega t,\sin\omega t)x^2=0. \tag{PFNO}$ ここで, $t\in\mathbb{R}$ は独立変数, $x\in\mathbb{R}$ は従属変数であり, β,γ,ω $(\gamma,\omega>0)$ は定数である. また, $\varphi,\psi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ は $\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\mid x_1,x_2=0\}$ の近傍で解析的な関数であり, 定数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ を用いて

$$\varphi(0, 0, y_1, y_2) = \alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

を満たす。 (PFNO) は、カオス現象の早期の発見例である Duffing 振動子や van der Pol 振動子といった工学上重要な常微分方程式にパラメトリック励振を与えたものを含んでおり、物理モデルとしては発振回路やブランコの運動などが挙げられる。 強制振動を与えたものと同様に、これらは特定のパラメータ値に対してカオス挙動を示し、また、 $|\gamma| \ll 1$ のときには、摂動論による Melnikov の方法で数学的にこの事実が説明づけられることが知られている [1,4]. 一方で、摂動論が適用できないようなパラメータ値については複雑な振る舞いをする説明づけがなされていなかった。

本発表では、ハミルトン系の完全可積分性を一般の自律的連続力学系に拡張した Bogoyavlenskij 可積分性 [3] を紹介するとともに、(PFNO) がこの意味で有理的非可積分であるための十分条件に関する結果を与える。これにより (PFNO) のカオス挙動の数学的根拠の一つが与えられる。本研究は矢ヶ崎一幸教授との共同研究である。

- [1] S.T. Ariaratnam, Wei Chau Xie and E.R. Vrscay, Chaotic motion under parametric excitation, Dynam. Stability Systems, 4 (1989), 111–130.
- M. Ayoul and N.T. Zung, Galoisian obstructions to non-Hamiltonian integrability, C.
 R. Math. Acad. Sci. Paris, 348 (2010), 1323–1326.
- [3] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, Comm. Math. Phys., 196 (1998), 19–51.
- [4] Q. Han, W. Xu and X. Yue, Global bifurcation analysis of a Duffing-Van der Pol oscillator with parametric excitation, Internat. J. Bifur. Chaos, 24 (2014), 1450051.

^{*}mnaga@amp.i.kyoto-u.ac.jp

Sierpiński gasket 上のエネルギー密度関数の不連続性

伊縫 寛治* 京都大学 人間・環境学研究科

キーワード:確率論,エルゴード理論

1 概要

フラクタル図形上の解析学は、複雑な構造をもつ対象におけるさまざまな現象を解析するため、理想化されたモデルにおける解析の理論として研究が進められてきた。この理論は物理学や化学および生物学などの分野において重要性が認識され始め、ここ 30 年で大きく理論が発展した。

ところで N 次元 Sierpiński gasket (以下 N を固定し、その集合を SG と表す) は、理想的な自己相似性を持つフラクタル図形の典型例である。 SG 上には標準的な Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が定まり、これによりエネルギー測度や SG 上のエネルギー密度関数が定義される。

これは、 \mathbb{R}^d 上に標準的な Dirichlet 形式が与えられたとき、 \mathbb{R}^d の C^1 級関数 f に対しエネルギー測度やエネルギー密度関数が定まることの類似である.ここで \mathbb{R}^d の場合は下の表のように具体的な表示を得ることができるが、SG の場合はエネルギー密度関数などの具体的な表示が得られないことに注意する.

表 1: \mathbb{R}^d 上における Dirichlet 形式・エネルギー測度・エネルギー密度関数の表示

空間	Dirichlet 形式	fのエネルギー測度	fのエネルギー密度関数
\mathbb{R}^d	$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d} dx$	$\nu_f(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2} \nabla f ^2 \mathrm{d}x$	$\frac{\mathrm{d}\nu_f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \nabla f ^2$

このエネルギー密度関数について Bell, Ho, and Strichartz は, SG 上の定数関数でない調和関数に対し, エネルギー密度関数が到るところ不連続であることを N=2 の場合でのみ示した [1]. 本発表ではエネルギー密度関数を導入したあと, $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ の場合にほぼ一般化した結果を紹介する. 以下が主結果である.

定理. SG 上の調和関数 h は定数関数でないと仮定する. このとき $\nu(SG \setminus A) = 0$ なる $A \subset SG$ が存在して, h のエネルギー密度関数の任意の ν -修正は A の各点で不連続となる. ここで ν は, 文献 [2] において導入された, Kusuoka measure と呼ばれる SG 上の測度である [3, Section 5.3].

- [1] R. Bell, C. W. Ho and R. S. Strichartz, Energy measures of harmonic functions on the Sierpiski gasket, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 831–868.
- [2] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.
- [3] R. S. Strichartz, Differential equations on fractals: a tutorial, Princeton University Press (2006).

^{*}inui.kanji.43a@st.kyoto-u.ac.jp

Large financial market における無裁定理論

浜口 雄史* 京都大学 理学研究科

キーワード:数理ファイナンス,無裁定理論,無限次元セミマルチンゲール

古典的なマーケットモデルは、有限個の株式などの危険資産を仮定し、その割引価格を有限次元確率過程でモデル化する.一方本講演では可算無限個の証券を仮定した large financial market における無裁定理論について、特に基準財変更との関連についての新しいアプローチを紹介する.

可算無限個の危険資産の価格過程を実数値セミマルチンゲールの列 $S = (S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ で表し、これを large financial market と呼ぶ. large financial market では、無限個の資産の保有による富過程を表現するために、無限次元セミマルチンゲールに関する一般化確率積分の概念を導入する必要がある.

裁定機会とは,直観的には「無リスクで正の富を得るような投資戦略」のことを指す.このような理想的な戦略が存在すれば,多くの(合理的な)投資家がこの戦略を取ることにより,需要と供給の関係から価格が変動,その結果裁定機会は直ちに消失するであろう.したがって数理ファイナンスにおける標準的なマーケットモデルは裁定機会が存在しない(無裁定)ことが要請される.

本講演では large financial market $\mathbb{X}=((S^n)_{n\in\mathbb{N}},1,V)$ を考える。ここで V は $S^0\equiv 1$ に代わる新しい基準財の交換レート (例えばドル/円相場) を表し,正値セミマルチンゲールであるとする。基準財を S^0 から V に変更すると,各危険資産および安全資産の V による割引価格はそれぞれ $\frac{S^n}{V}$ および $\frac{1}{V}$ となる。したがって新しい large financial market $\mathbb{Z}=((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}},\frac{1}{V},1)$ を考えることとなる。本講演では,新しいマーケット \mathbb{Z} における無裁定型条件を元のマーケット \mathbb{X} に関する条件として記述し,さらに基準財変更によって無裁定型条件が保存するための条件について説明する。

- [1] Delbaen-Schachermayer; The Mathematics of Arbitrage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).
- [2] De.Donno-Pratelli; Stochastic integration with respect to a sequence of semimartingales. In memoriam Paul-Andr Meyer: Sminaire de Probabilits XXXIX, 119135, Lecture Notes in Math., 1874, Springer, Berlin, (2006).
- [3] Cuchiero-Klein-Teichmann; A new perspective on the fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. Theory Probab. Appl. 60 (2016), no. 4, 561579.

^{*}hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp

マルコフ的なランダム力学系

渡邉 天鵬 * 大阪大学 理学研究科

キーワード: ランダム複素力学系,マルコフ連鎖,フラクタル幾何学,確率論,協調原理

本講演は京都大学の角大輝氏との共同研究に基づく。研究のテーマは、複素力学系の派生として、マルコフ連鎖のようなランダム性があるランダム複素力学系を考察することである。

モチベーション

m 個の多項式 f_1, \ldots, f_m を固定し、これらをリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への正則写像とみる。初期値 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ からランダムに写像 f_i を選んで時間発展するようなランダム力学系を考えたい。写像を独立同分布で選ぶ力学系は [1] などで研究されてきた。これを一般化し、**写像** f_i **を選んだ後には確率** p_{ij} **で** f_j **を選ぶ** という条件をつけた、マルコフ的ランダム力学系を考察することが本研究の動機である。本講演では特に、初期値 z_o が無限遠点に収束する確率について考える。

設定と主結果

2 次以上の多項式全体 \mathcal{P} に一様収束位相を入れる。 \mathcal{P} 上にコンパクトサポートを持つような m^2 個の非負測度 $\tau=(\tau_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ で,任意の $i=1,\cdots,m$ に対し $\sum_{j=1}^m \tau_{ij}$ が \mathcal{P} 上で全測度 1 になるものが与えられたとする。ただし, $\tau_{ij}\equiv 0$ かもしれない。 $\mathbb{Y}:=\hat{\mathbb{C}}\times\{1,\cdots,m\}$ 上の点 (z,i) からボレル集合 $B\times\{j\}$ への遷移確率が $\tau_{ij}(\{f\in\mathcal{P};f(y)\in B\})$ であるマルコフ連鎖を考える。初期点 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ から出発して無限遠点に収束する確率を $T_\infty(z_0)$ とする。

定理 (協調原理の一般化). 適当な条件のもとで力学系は穏やかになり、カオスと秩序の間にグラデーションができる。例えば、関数 T_{∞} : $\hat{\mathbb{C}} \to [0,1]$ は連続である。

m=1 のとき、この設定は独立同分布のランダム力学系である。この結果は独立同分布のときに [1] で示された事実の一般化である。

参考文献

[1] H. Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 102 (2011), no. 1, 50-112.

^{*}u139784f@ecs.osaka-u.ac.jp

Lifespan of small solutions to the Schrödinger equation with a subcritical nonlinearity

佐川 侑司* 大阪大学 理学研究科

キーワード:偏微分方程式

本講演は大阪大学の砂川秀明氏と保田舜介氏との共同研究に基づく.次の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases}
i\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{p-1}u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\
u(0, x) = \varepsilon \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d,
\end{cases} \tag{1}$$

ここで u=u(t,x) は複素数値の未知関数, $\Delta=\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \lambda\in\mathbb{C}, p>1, d=1,2,3$ である. i は虚数単位を表す. ε は初期値の大きさを表す十分小さな正のパラメータであり, φ は適当な重み付き Sobolev 空間 $H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ に属する既知関数とする.

小さな初期値を対象とする場合には、非線形項のべき p が大きいほど非線形効果は小さいと期待される。とくに $p>1+\frac{2}{d}$ ならば、十分小さい ε に対して (1) の解は時間大域的に存在し、 $t\to\infty$ において自由解 ((1) で $\lambda=0$ とした解) に漸近することが知られている。一方 $1 の場合、非線形効果は小さいとみなすことができない。そのため (1) の解が時間大域的に存在するかどうかについて議論するには、より詳細な解析が必要となる。本研究では <math>1 かつ <math>\mathrm{Im}\,\lambda>0$ の場合について考察する。この場合は時間大域解の存在を示した結果は皆無であり、d=1 かつ $2\le p < 3$ の場合に限り解の lifespan の評価が得られている ([2])、本研究の目的は、[2] の拡張および改良を行うことである。

表記が複雑になることを避けるため、非線形項のべき p を $p=1+2\theta/d$ に置きかえる. 今回得られた主結果は以下の通りである.

定理 1 ([1]). d=1,2,3 とする. $0<\theta<1$, ${\rm Im}\,\lambda>0$, $d/2< s< {\rm min}\{2,1+2\theta/d\}$, $\varphi\in H^s\cap H^{0,s}(\mathbb{R}^d)$ とする. また (1) の解の lifespan T_ε を, (1) の解 $u\in C([0,T);H^s\cap H^{0,s}(\mathbb{R}^d))$ が一意的に存在する時刻 T の上限と定義する. このとき, 次が成立する.

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \left(\varepsilon^{2\theta/d} T_{\varepsilon}^{1-\theta} \right) \ge \frac{(1-\theta)d}{2\theta \operatorname{Im} \lambda \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \hat{\varphi}(\xi) \right|^{2\theta/d}}.$$

- [1] Y. Sagawa, H. Sunagawa and S. Yasuda, A sharp lower bound for the lifespan of small solutions to the Schrödinger equation with a subcritical power nonlinearity, arXiv:1703.03125.
- [2] H. Sasaki, On the life span of the Schrödinger equation with sub-critical power non-linearity, Adv. Differential Equations, 14 (2009), no.11-12, 1021–1039.

^{*}y-sagawa@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Lie 群上の変分原理に基づく エネルギー保存数値解法

石川 歩惟* 神戸大学 大学院システム情報学研究科

キーワード:幾何学的力学,数値解法,Lie群

概要

近年,主に解析力学における運動方程式に対し、それがもつ構造を離散化後にも保つようなスキームの設計方法が盛んに研究されている。離散勾配法 [1] はそのような方法の一つであり、特に Hamilton 方程式に対してはエネルギー保存則を保つスキームを与える。離散勾配法のスキームには、方程式に現れる勾配の代わりに、勾配を特徴づける性質の一つである連鎖律を引き継ぐよう定義された離散勾配が用いられる。離散勾配法で得られるスキームは、長時間計算においても定性的に優れた計算結果を与える。そのため、多様体上への拡張[2] など、離散勾配法は様々な形に幅広く拡張されてきた。しかし、一般に陰的スキームが得られるために計算コストが大きくなりがちであり、また、理論的には解析力学の基本原理である変分原理との自然な関係も明らかでない。

これに対し、変分原理と離散勾配の両方を利用した新たなエネルギー保存数値解法が提案された [3]. Noether の定理は、1パラメータ変換群に対するハミルトニアンの不変性から、それに対応する保存則が導かれることを述べている。 [3] では、エネルギー保存則が時間対称性から導かれること、また、その証明の中で変分原理や Hamilton 方程式が使われていることに着目している。そして、この証明の計算過程を離散版で再現することで、エネルギー保存スキームが設計される。この方法は離散勾配法とは異なり、どのような方程式に対しても陽的なスキームが設計できるという特徴をもつ。

一方、剛体の運動の記述などのためには、配位多様体として Lie 群を用いる場合がある。しかし、[3] では線形空間上の運動しか考慮されておらず、Lie 群上の運動は取り扱えない。そこで本発表では、Lie 群上の変分原理と [2] のアイデアを利用し、[3] の方法を Lie 群上に拡張する。発表当日は、実際に SO(3) 上での数値実験結果も示す。

- [1] O. Gonzalez, J. Math. Shirah., 5 (2017), 1202-1205.
- [2] E. Celledoni and B. Owren, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **34** (2014), 977–990.
- [3] A. Ishikawa and T. Yaguchi, JSIAM Lett., 8 (2016), 53–56.

^{*}a-ishikawa@stu.kobe-u.ac.jp

トーラス幾何による N 点渦環の安定化

清水 雄貴* 京都大学 理学研究科

キーワード:数理流体力学, Geometric Vortex Dynamics.

二次元平面上に限らず、一般の曲面上でも非圧縮非粘性流体の運動はオイラー方程式によって定式化される。よって曲面上の流体運動も平面と同様に、この方程式の速度場の回転成分を表す渦度の時間発展として記述される。そのため幾何学的情報(初期渦度分布と曲面の形状)から流れを定性的に理解すること(各時刻の渦度分布を定性的に求めること)は曲面上の流体力学研究の主要なテーマである。オイラー方程式の速度場はラプラス-ベルトラミ方程式の基本解である流体力学的グリーン関数 G_H と渦度で表され、渦度は流体粒子の軌道に沿って保存される。そこで、渦度がデルタ関数の線形結合で書かれるものを考え、これを点渦力学系(点渦系)といい、その線形係数を渦の強度と呼ぶ。流れの定性的理解は点渦の軌道を扱うことで達成される。

曲面上の点渦系は有限次元ハミルトン系として定式化されるため、複雑な流れ場に対しても、その幾何学的性質が点渦の相互作用へ及ぼす影響を理解するのに適している。またこうした理論的な動機だけでなく、トーラス上の超流動現象の数理モデルとしての応用もある[1].

流れの定性的理解の最も基本的なものの一つに定常解がある。それと並行して定常解の安定性や分岐を調べることも重要であり、この方向でこれまで多くの研究成果がある [2]. 回転体に対し、同一強度のN 個の点渦を回転で不変な円周上に等間隔に並べた初期渦度分布をN 点渦環といい、平面や球面上のN 点渦環の各点渦は同一の回転速度で等速円運動を行う(相対)定常解となる。平面上のN 点渦環の線形安定性について、 $N \le 7$ では中立安定となるが、N > 7では不安定となる。こうしたN = 7を境にN 点渦環が中立安定から不安定に転じる現象は、平面に限らず球面などのいくつかの単連結・平坦面に対しても起こることが知られている。

そこで本講演では、標準トーラス上のN点渦環の線形安定性を曲面の幾何学的性質の観点から考察し、特にN点渦環がある状況においてN>7であっても中立安定となることを紹介する。本講演は坂上貴之教授(京都大学)との共同研究に基づく。

- [1] A. Corrada-Emmanuel. Exact solution for superfluid film vortices on a torus. Phys. Rev. Lett. 72, (1994), pp.681-684. (doi:10.1103/PhysRevLett.72.681)
- [2] P. K. Newton. The N-Vortex Problem, Analytic Techniques, Appl. Math. Sci. 145 (2001) Springer Verlag, New York.
- [3] T. Sakajo and Y. Shimizu, Toroidal geometry stabilizing a latitudinal ring of point vortices on a torus, submitted.

^{*}shimizu@math.kyoto-u.ac.jp

Bose-Einstein 凝縮の厳密な導出

蓑島 淳* 京都大学理学研究科数学教室

キーワード: Bose-Einstein 凝縮 (BEC), 非線形 schrodinger, Gross-Pitaevskii

N 粒子 Boson は、ハミルトニアンが、

$$\mathcal{H}_{N} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ -\Delta_{i} + V(x_{i}) \right\} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} v(x_{i} - x_{j})$$

のときの、 schrodinger 方程式

$$\partial_t \phi(x_1, \cdots, x_N; t) = \mathcal{H}_N \phi(x_1, \cdots, x_N; t)$$
, where $\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx_1 \cdots dx_N |\phi|^2 = N$.

の完全置換対称な解(つまり、任意の置換 σ に対して $\phi(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(N)};t)=\phi(x_1,\cdots,x_N;t)$ を満たす解)に対応している。ここでVは外場のポテンシャル、vは二体相互作用のポテンシャル、 Δ_i は座標iについてのラプラシアンであり、考える問題によって適切な定義域と境界条件(例えば有限の大きさのiBox と周期境界条件や、iRi2 全体)を課す。

十分大きな N について、 N 粒子 Boson の Gound State の波動関数 $\phi(x_1,\cdots,x_N;t)$ が、適切な 1 粒子波動関数 $\varphi(x;t)$ の N 個の積の N 粒子波動関数(つまり、 $\varphi(x_1;t)\varphi(x_N;t)$)に、何らかの意味で収束することが、実験的にも近似的な理論からも想定されている。この状況のことを Bose-Einstein 凝縮 (BEC) と呼ぶ。このことは、自由粒子つまり相互作用がない場合においては自明である。 Einstein が 1925 年の論文において、自由粒子の場合この状況が $T_c(\neq 0)$ 以下の温度化で発生することを理論的に予言したことで有名である。

厳密には、 N 粒子 Boson の Ground State の波動関数 ϕ の One-particle matrix

$$\gamma_{\phi}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} dx_2 \cdots dx_N \phi(x,x_2,\cdots,x_N;t) \overline{\phi(y,x_2,\cdots,x_N;t)}$$

について、

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} < \varphi, \gamma_{\phi} \cdot \varphi > = 1,$$

であることが想定されている。また、実験的にも近似理論からも、収束すると想定される 1 粒子波動関数 $\varphi(x;t)$ は、以下の非線形 schrodinger 方程式(Gross-Pitaevskii 方程式)

$$(-\Delta + V(x) + 8\pi a |\varphi(x)|^2)\varphi(x;t) = \partial_t \varphi(x;t)$$

を満たすことが想定されている。これらのことは、Lieb,Seiringer,Yngvason によって初めて、いくつかの条件下ではあるが、非自明な相互作用について、厳密に示された。 ([1], [2] など) 本公演では、これらの厳密な導出に関するいくつかの結果を紹介する。

- [1] E. H. Lieb and R. Seiringer, Proof of Bose-Einstein condensation for dilute trapped gases, Phys. Rev. Lett., 88 (2002), 170409.
- [2] E. H. Lieb, R. Seiringer, and J. Yngvason, Bosons in a trap: A rigorous derivation of the Gross-Pitaevskii energy functional, Phys. Rev. A 61 (2000), 043602.

^{*}jun1861@math.kyoto-u.ac.jp

$U^p - V^p$ spaces とその KP-II 方程式への応用

櫻井 涼* 京都大学 理学研究科 M1

キーワード: $U^p - V^p$ spaces, KP-II, 分散型方程式

以下の非線形偏微分方程式を Kadomtzev-Petviashvili II(KP-II) 方程式と呼ぶ:

$$\begin{cases} \partial_x(\partial_t u(t,x,y) + \partial_x^3 u(t,x,y) + u\partial_x u(t,x,y)) + \partial_y^2 u(t,x,y) = 0\\ u(0,x,y) = u_0(x,y) \end{cases}$$

ここで, $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ である. KP-II 方程式の, 初期値を次の non-isotropic homogeneous Sobolev space,

$$\dot{H}^{-\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^2) := \left\{ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \; \left| \; ||u||_{H^{-\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^2)} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-1} |\hat{u}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} < \; \infty \right\}$$

(ここで, \hat{u} は u の Fourier 変換を表す.) に取ったときの initial value probrem の (global) well-posedness を考えたい. この Sobolev 空間の指数は scaling critical な状況を考えている。 非線形分散型方程式の解の存在性を示すときには不動点定理が用いられることが一般的であるが, どのような関数空間上に縮小写像を構成すればよいかが大きな問題となる. その際よく使われる非常に便利な関数空間に $X^{s,b}$ space と呼ばれるものがあるが, この空間で評価を得る際には $b > \frac{1}{2}$ という仮定が必要となり, scaling critical な場合である今回のケースではうまくいかない.

表題にある U^p-V^p spaces は, U^p -atom と呼ばれる atom によって構成される atomic space と, $(L^2$ -value の) bounded p-variation な関数の空間を指す $(p \in [1,\infty))$. これらの空間は,p=2 の際には $X^{s,b}$ space の $b=\frac{1}{2}$ の場合に相当し,かつ duality と interpolation から $X^{s,b}$ space よりも扱いやすい空間となっている. [1] では U^p-V^p spaces を用いて定義される関数空間を経由することで、最終的に $\dot{H}^{-\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^2)$ での well-posedness を示すことに成功している. 本講演では、well-posedness を示すために重要な役割を果たす U^p-V^p spaces の重要な性質について説明し、時間が許せば、具体的に KP-II 方程式へどのように応用されるかについても話したい.

- [1] M. Hadac, S. Herr, H. Koch, Well-posedness and scattering for the KP-II equation in a critical space, Ann. Inst. Henri Poincaré 26(2009)917-941
- [2] M. Hadac, Well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili II equation and generalisations, Trans. Amer. Math. Soc.360(12)(2008)6555-6572.

^{*}rsakurai@kyoto-u.ac.jp

可逆な化学反応を記述する反応拡散方程式系の解の 漸近挙動

馬越 春樹 * 大阪大学 基礎工学研究科

キーワード: 反応拡散方程式

可逆な化学反応

$$\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n \rightleftharpoons \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_n A_n$$

を考える。ここに、 $A_1,...,A_n$ は反応に関与する化学種、 $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n$ は化学量論係数を表す。この化学反応は有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\in\mathbb{N})$ の中で進行すると仮定する。更に、拡散項は Fick の法則、反応項は質量作用の法則に従うと仮定すると、各化学種 A_i の濃度 $u_i(i=1,...,n)$ の時間発展は反応拡散方程式系

$$\partial_t u_i - d_i \Delta u_i = (\beta_i - \alpha_i)(k_f \prod_{i=1}^n u_j^{\alpha_j} - k_r \prod_{i=1}^n u_j^{\beta_i}) \quad i = 1, ..., n$$

により記述される。ここに、正定数 $d_i>0$ は拡散係数、 $k_f,k_r>0$ はそれぞれ正反応、逆反応の反応速度定数を表す。また、化学量論係数は (通常は自然数であるが、より一般的に) $\{0\}\cup[1,\infty)$ の値を取ると仮定する。この上で斉次ノイマン境界条件を仮定し、更に初期値、及び領域の境界に適当な滑らかさを仮定すれば、反応項は局所リプシッツ連続であるので時間局所的な古典解の一意存在が得られる (加えて、反応項のQuasi-Positivity により初期値の非負性から解の非負性が従う)。時間大域的な可解性については一般的には困難である事が知られており (実際、化学量論係数はいくらでも大きな値を取り得る為、反応項の多項式増大度は一般的には極めて大きくなり、反応項の制御が困難となる)、長い間未解決問題となっていたが、反応の可逆性から導かれるエントロピー構造を利用して renormalized solution と呼ばれる極めて弱い解のクラスで時間大域的な可解性が近年証明された ([1])。ここに、 $u=(u_1,...,u_n)$ が時間大域的な renormalized solutionであるとは $u_i\in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^1(\Omega)_+)$ 、 $\sqrt{u_i}\in L^\infty_{loc}(0,\infty;H^1(\Omega))$ (i=1,...,n) で以下の表現形式を満たす事をいう: $\forall T>0$ 、 $\forall \psi\in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$, $\forall \xi\in C^2((0,\infty)^n;\mathbb{R})$ $with\ \forall i,\ \overline{supp\partial_i\xi}\subset\mathbb{R}$: compact,

$$\int_{\Omega} \xi(u(T,x))\psi(T,x)dx - \int_{\Omega} \xi(u_{0}(x))\psi(0,x)dx - \int_{0}^{T} \int_{\Omega} \xi(u(t,x))\partial_{t}\psi(t,x)dxdt$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{0}^{T} \int_{\Omega} \psi(t,x)\partial_{i}\partial_{j}\xi(u(t,x))(d_{i}\nabla u_{i}(t,x))\nabla u_{j}(t,x)dxdt$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{T} \int_{\Omega} \partial_{i}\xi(u(t,x))(d_{i}\nabla u_{j}(t,x)) \cdot \nabla \psi(t,x)dxdt$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{T} \int_{\Omega} \partial_{i}\xi(u(t,x))(\beta_{i} - \alpha_{i})(k_{f} \prod_{j=1}^{n} u_{j}^{\alpha_{j}} - k_{r} \prod_{j=1}^{n} u_{j}^{\beta_{j}})\psi(t,x)dxdt.$$
(1)

平衡点が一意である場合、時間大域解 (1) の漸近挙動の解析は Entropy Method により確立されている。一方で、平衡点の一意性が崩れた場合には漸近挙動の有力な解析方法が確立されておらず、これからの研究課題である。本講演では複数の平衡点がある場合に於ける漸近挙動の解析方法の 1 つを紹介する。本研究は、Michel Pierre 氏 (ENS Rennes), 鈴木貴氏 (大阪大学) との共同研究に基づく ([2])。

- [1] J. Fischer, Global existence of renormalized solutions to entropy-dissipating reaction-diffusion systems, Arch. Ration. Mech. Anal., 218(1) (2015), 553-587.
- [2] M.Pierre, T. Suzuki, H. Umakoshi, Asymptotic Behavior of Renormalized Soultions to Chemical Reaction-Diffusion Systems with boundary equilibria, to appear.

^{*}h-umakoshi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography

川越 大輔* 京都大学大学院 情報学研究科

キーワード:微分積分方程式,特異性の伝播,逆問題

本講演は、國立臺灣大學數學系の 陳 逸昆 助理教授との共同研究に基づく.

定常輸送方程式 (Stationary Transport Equation, STE) の境界値問題を考える:

$$\begin{cases} \xi \cdot \nabla_x f(x,\xi) + \mu_t(x) f(x,\xi) = \mu_s(x) \int_{S^{d-1}} p(x,\xi,\xi') f(x,\xi') \, d\sigma_{\xi'}, & (x,\xi) \in \Omega \times S^{d-1}, \\ f(x,\xi) = f_0(x,\xi), & (x,\xi) \in \Gamma_-. \end{cases}$$

但し、 Ω は \mathbb{R}^d (d=2,3) 内の有界凸領域で、その境界 $\partial\Omega$ は C^1 級であるとする。また、 S^{d-1} は \mathbb{R}^d 内の単位球面である。本問題の"境界" Γ_\pm は、 $\partial\Omega$ の点 x における外向き単位法線ベクトル n(x) を用いて、 $\Gamma_\pm:=\{(x,\xi)\in\partial\Omega\times S^{d-1}|\pm n(x)\cdot\xi>0\}$ で定義される。

本講演の目的は、解の境界値 f_0 および $f|_{\Gamma_+}$ から係数 μ_t を決定する方法を提案することである。この方法は、次世代の医用断層撮影技術である光トモグラフィ (optical tomography) に応用される。

主結果の設定を述べる。領域 Ω に対して, $\overline{\Omega}=\cup_{j=1}^N\overline{\Omega_j}$ を満たす disjoint な部分領域 $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ が存在し,それらの境界 $\partial\Omega_j$ は区分的 C^1 級で generalized convexity と呼ばれる条件を満たすとする。ここで, $\Omega_0:=\cup_{j=1}^N\Omega_j$ とおく。 μ_t , μ_s は \mathbb{R}^d 上の非負値有界函数で, Ω_0 上連続, $x\in\mathbb{R}^d$ で $\mu_t(x)\geq\mu_s(x)$, $x\in\mathbb{R}^d\backslash\Omega_0$ で $\mu_t(x)=\mu_s(x)=0$ を満たすとする。また,p は $\mathbb{R}^d\times S^{d-1}\times S^{d-1}$ 上の非負値有界函数で, $\Omega_0\times S^{d-1}\times S^{d-1}$ 上連続, $(x,\xi,\xi')\in(\mathbb{R}^d\backslash\Omega_0)\times S^{d-1}\times S^{d-1}$ で $p(x,\xi,\xi')=0$,任意の $(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times S^{d-1}$ に対して $\int_{S^{d-1}}p(x,\xi,\xi')d\sigma_{\xi'}=1$ を満たすと仮定する。 γ を,d=2 のとき $\partial\Omega$ 内の 2 点,d=3 のとき $\partial\Omega$ 内の単純閉曲線とすると, γ は $\partial\Omega$ を 2 つの領域 A と B に分ける。これらの領域に対して,境界値 f_0 を

$$f_0(x,\xi) := \begin{cases} 1, & (x,\xi) \in ((A \cup \gamma) \times S^{d-1}) \cap \Gamma_-, \\ 0, & (x,\xi) \in (B \times S^{d-1}) \cap \Gamma_-, \end{cases}$$

で与える。また、 $\tau_-(x,\xi) := \inf\{t>0 | x-t\xi\notin\Omega\}$ 、 $P(x,\xi) = x-\tau_-(x,\xi)\xi$ 、境界値問題の解 f の不連続点全体を disc(f) と書く。点 $(\bar x,\bar\xi)\in disc(f)$ における f の jump discontinuity [f] を

$$[f](\bar{x},\bar{\xi}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ P(x,\xi) \in A \cup \gamma}} f(x,\bar{\xi}) - \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ P(x,\xi) \in B}} f(x,\bar{\xi})$$

で定義する.

以上の設定の下,次の定理を得る.

定理 1. $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in disc(f) \cap \Gamma_+$ に対し、

$$[f](\bar{x},\bar{\xi}) = \exp\left(-\int_{\mathbb{D}} \mu_t(\bar{x}-r\bar{\xi}) dr\right).$$

本研究は JSPS 科研費 JP15K17572 の助成を受けたものです.

^{*}d.kawagoe@acs.i.ktyoto-u.ac.jp