第８回白浜研究集会

開催期間：2016 年 11 月 28 日（月）から 12 月 1 日（木）

開催場所：紀州・白浜温泉 旅館むさし

プログラム& アブストラクト

11 月 28 日 (月)

14:50–15:00　開会の挨拶

15:00–15:40　蘆田(あしだ) 聡平(そうへい)（京都大学 理学研究科 D2）

分子前期解離のレゾナンスの幅の指数評価

15:50–16:30　坂本(さかもと) 祥太(しょうた)（京都大学 人間・環境学研究科 D3）

希薄気体中における粘性摩擦の数理解析

16:40–17:20　佐川(さがわ) 侑司(ゆうじ)（大阪大学 理学研究科 D1）

非線形シュレディンガー方程式の解の最大存在時刻

11 月 29 日 (火)

09:30–10:10　佐野(さの) めぐみ（大阪市立大学 理学研究科 D2）

有界領域上の一般化された臨界 Hardy 不等式に関連する最小化問題

10:20–11:00　石川(いしかわ) 歩惟(あい)（神戸大学 システム情報学研究科 M2）

シンプレクティック空間上で表現された KdV 方程式の離散化

11:10–11:50　山添(やまぞえ) 祥太郎(しょうたろう)（京都大学 情報学研究科 D3）

小さいポテンシャルを持つ非線形 Schrödinger 方程式における定在波解の軌道安定性

昼食

14:00–14:40　西口(にしぐち) 純矢(じゅんや)（京都大学 理学研究科 D3）

ダイナミクスにおける時間遅れの構造をどのように理解するべきか？

14:50–15:30　川口(かわぐち) 澄恵(すみえ)（京都大学 理学研究科 M2）

計算機による二次元非圧縮流れパターンのコード化

Tea Time (20 分)

15:50–16:10(SC)　檜垣(ひがき) 充朗(みつお)（京都大学 理学研究科 D1）

粗い境界付近の粘性流体の数学解析

16:10–16:30(SC)　須田(すだ) 智晴(ともはる)（京都大学 人間・環境学研究科 M2）

Flow の解析と Helmholtz-Hodge 分解

16:40–17:00(SC)　森(もり) 隆大(たかひろ)（京都大学 理学研究科 M1）

Self-Intersection Local Times of Brownian Motion

17:00–17:20(SC)　世良(せら) 透(とおる)（京都大学 理学研究科 M1）

Markov 過程に関するエルゴード定理

17:20–17:40(SC)　浜口(はまぐち) 雄史(ゆうし)（京都大学 理学研究科 M1）

PCS 過程とバリアオプション

<u>11 月 30 日 (水)</u>

09:30–10:10　中島(なかじま) 秀太(しゅうた)（京都大学 数理解析研究所 D1）

First Passage Percolation and its related topic

10:20–11:00　清水(しみず) 雄貴(ゆうき)（京都大学 理学研究科 M1）

トーラス上の渦力学

11:10–11:50　山中(やまなか) 祥五(しょうご)（京都大学 情報学研究科 M2）

解析的に非可積分な解ける微分方程式について

昼食

14:00–14:40　野場(のば) 啓(けい)（京都大学 理学研究科 D1）

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

14:50–15:30　川越(かわごえ) 大輔(だいすけ)（京都大学 情報学研究科 D2）

Propagation of boundary-induced discontinuities in radiative transfer

Tea Time (20 分)

みのしま じゅん
15:50–16:10(SC)　蓑島 淳（京都大学 理学研究科 M1）

極大消散作用素に対応する Extrapolation の存在及び発展方程式への応用

しみず いっけい
16:10–16:30(SC)　清水 一慶（京都大学 理学研究科 M1）

Schrödinger maps および Coulomb gauge による表現

うだ ともき
16:40–17:20　宇田 智紀（京都大学 理学研究科 D3）

主値積分の形状微分を用いた定常渦班の数値計算

12 月 1 日 (木)

ごとうだ たけし
09:50–10:30　後藤田 剛（京都大学 理学研究科 D3）

渦層の相互作用による特異点の出現と渦の巻き上げの数値計算

いぬい たかひさ
10:40–11:20　戌亥 隆恭（京都大学 理学研究科 D3）

一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式の大域解について

11:20–11:30　閉会の挨拶

(SC：ショートコミュニケーション)

分子前期解離のレゾナンスの幅の指数評価

蘆田　聡平 * 京都大学 理学研究科

キーワード：シュレーディンガー方程式、Born–Oppenheimer 近似、レゾナンス

シュレーディンガー方程式

$$i\partial_t u(t,x) = Hu(t,x)$$

においてハミルトニアン H の表象を古典力学のハミルトニアンとして、ハミルトン方程式の解を考える。物理的直観から、$E \in \mathbb{R}$ が H のスペクトルに入るとき、エネルギー E の古典軌道が全て有界領域に留まるなら E は固有値である。一方で、エネルギー E の任意の古典軌道が無限に遠くまで行くなら E は連続スペクトルに入る。これらに対して、有界領域に留まる軌道と無限に遠くまで行く軌道の両方が存在するようなエネルギーの領域に関しては、実部がこの領域に入る複素数値の固有値に対応する L^2 に入らない固有関数が存在する。この固有値をレゾナンスと呼ぶ。

以下、空間が 1 次元の場合を考える。h を小さいパラメーター、V をポテンシャルとして $H = -h^2\Delta + V$ とする。レゾナンスを $E,\ \mathrm{Im}E \leq 0$ として、$\liminf_{x\to+\infty}(ReE - V(x)) > 0,\ \liminf_{x\to-\infty}(V(x) - ReE) > 0$ が成り立つとする。レゾナンスに対応する固有状態 u の遠方での漸近挙動は $u \sim e^{i\int_a^x (E-V(t))^{1/2}/hdt}(E - V(x))^{-1/4},\ x \to +\infty$ となる。ポテンシャルが $|\mathrm{Im}x| < C\langle \mathrm{Re}x\rangle$ の形の領域に解析接続されるとすると、上の漸近挙動がこの領域で成立するなら、$F_\theta(x) = x + i\theta x, \theta > 0,\ x > C > 0,\ F_\theta(x) = x,\ x < 0$ として $F_\theta(\mathbb{R})$ の上で u は L^2 に入る。この特徴づけからレゾナンスが定義できる。また、レゾナンスは伸張群による H の変換の解析接続の固有値であることもわかる。

レゾナンスの虚部の大きさは対応する固有関数の安定性に関係していて、レゾナンスの幅と呼ばれる。Servat [1] は $V(x) > \mathrm{Re}E$ となる区間 I での積分 $S = \int_I (V(x) - E)^{1/2}dx$ を用いて $|\mathrm{Im}E| \leq Che^{-2S/h}$ の評価を導いた。

Born–Oppenheimer 近似においては、いくつかの電子と原子核からなる系において電子と原子核の質量の比を 0 に近づけるときのシュレーディンガー方程式の解の挙動を調べる。このとき電子のエネルギー準位が交差している場合は分子の前期解離に関係していて、原子核に対して、対角成分がハミルトニアンになっている微分作用素の行列を考える必要がある（Klein-Martinez-Seiler-Wang [2]）。私はこのような作用素に対して、Fujiie-Martinez-Watanabe [3] における解の構成を用いて上記のようなレゾナンスの幅の指数評価を導いた。

参考文献

[1] E. Servat, *Asymptotic anal*, **39** (2004), 187-224.

[2] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, X. P. Wang, *Commun. Math. Phys.*, **143** (1992), 607-639.

[3] S. Fujiie, A. Martinez, T. Watanabe, *J. Differential Equations*, **260** (2016), 4051-4085.

* ashida@math.kyoto-u.ac.jp

希薄気体中における粘性摩擦の数理解析

坂本　祥太* 京都大学大学院　人間・環境学研究科
（日本学術振興会特別研究員 DC2）

キーワード：分子気体運動論、粘性摩擦、Vlasov 方程式

3 次元空間に分布した流体の内部において、底面の中心が x 軸上にあり、x 軸正の方向に動こうとする円筒形の物体の運動に関する、次のような問題を考える。

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = V(t),\ \dot{V}(t) = E - F(t), t > 0, \\ &X(0) = 0,\ V(0) = V_0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここに $X(t)$ と $V(t)$ は物体の x 軸方向の位置と速度、定数 $E > 0$ は外力の強さ、$F(t)$ は物体表面と流体の相互作用による摩擦項である。流体が連続体の場合、典型的なモデルは $F(t) = -\lambda V(t)$ $(\lambda > 0)$ であるが、この場合 $V(t)$ に関する微分方程式 $\dot{V}(t) = E - \lambda V(t)$ は容易に解くことができて、$V_\infty = E/\lambda$ を終末速度（微分方程式の定常状態）として

$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty)e^{-\lambda t}$$

となる。この場合 $V(t)$ は $V_0 - V_\infty$ の符号にかかわらず単調かつ指数的に V_∞ に漸近することが分かる。一方流体が希薄気体と考え、気体中の粒子が物体に衝突することによって摩擦が起きる、というモデルを採用すると $F(t)$ はより複雑な形をとる。このとき粒子同士の相互作用がないとすると気体の運動は Vlasov 方程式

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = 0, \quad t > 0,\ x \notin \Omega,\ v \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

と表される。ただし Ω を物体の表面および内部とした。(1) と (2), さらに粒子と物体の相互作用の仕方を表す境界条件を組み合わせた系の解 (V, f) において、$V_\infty - V(t)$ は単調に 0 に漸近するとは限らず、かつその速さも

$$|V_\infty - V(t)| \sim \frac{1}{(1+t)^\alpha}\ (t \to \infty) \tag{3}$$

（α は問題設定に依存するが、1 より大で高々5 まで）と連続体でのモデルと比べ明らかに解の振る舞いが異なる。詳しくは先駆的研究 [1] やモノグラフ [2] をみよ。本講演では、どのようにして漸近挙動が証明されるか、境界条件や（ここでは簡単のため円筒に限ったが）物体の形状によってどのように漸近速度が変わるか、などに関して発表する予定である。

参考文献

[1] S. Caprino, G. Cavallaro, and C. Marchioro, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17** (2007), 1369-1403.

[2] P. Buttà, G. Cavallaro, and C. Marchioro, *Mathematical Models of Viscous Friction*, (Springer, Cham, 2015).

*sakamoto.shota.76r@st.kyoto-u.ac.jp

非線形シュレディンガー方程式の解の最大存在時刻

佐川 侑司 [*] 大阪大学 理学研究科

キーワード：偏微分方程式

本講演は大阪大学の砂川秀明氏との共同研究に基づく. 次の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = N(u, \partial_x u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $i = \sqrt{-1}$, $u = u(t,x)$ は複素数値未知関数である. また ε は初期値の大きさを表す正のパラメータである. φ は適当な重み付き Sobolev 空間 $H^{s,\sigma}$ に属する既知関数とし, 非線形項 N は $(u, \overline{u}, \partial_x u, \overline{\partial_x u})$ についての 3 次斉次多項式とする.

非線形摂動の立場から (1) の解の長時間挙動を考えると, 3 次の非線形項が臨界的な状況を与えることが分かる. すなわち, 3 次の非線形項を伴う 1 次元シュレディンガー方程式は, 初期値がどんなに小さくても時間大域解が存在するとは限らないし, 仮に時間大域解が存在したとしても, 一般的に $t \to +\infty$ において自由解には漸近しない. 別の言い方をすると, 非線形項 N は (1) の解の長時間挙動に本質的な影響を与える. そのことを考察したのが砂川秀明氏による先行研究 [2] である. そこでは非線形項が gauge 条件を満たす場合において解の lifespan の評価が得られた.

今回, 非線形項が gauge 条件を満たすとは限らない場合においても解の lifespan の評価を与えることができたので, そのことを報告する. 得られた主結果は次のとおりである.

定理 1 ([1])**.** 非線形項 N は $N(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta}N(1,0)$, $(\theta \in \mathbb{R})$ を満たすと仮定する. $\varphi \in H^3(\mathbb{R}) \cap H^{2,1}(\mathbb{R})$ とする. 次に, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$\Psi(\xi) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} N(z, i\xi z)\frac{dz}{z^2}$$

と定義する. さらに最大存在時刻 T_ε を初期値問題 (1) が $C([0,T); H^3(\mathbb{R}) \cap H^{2,1}(\mathbb{R}))$ において一意的な解を持つような正の実数 T の上限と定義する. このとき

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{2\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}}\bigl(|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \operatorname{Im}\Psi(\xi)\bigr)}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] Y. Sagawa and H. Sunagawa, *The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one space dimension,* Discrete Contin. Dynam. Systems **36** (2016), no.10, 5743–5761.

[2] H. Sunagawa, *Lower bounds of the lifespan of small data solutions to the nonlinear Schrödinger equations,* Osaka J. Math. **43** (2006), no.4, 771–789.

[*] y-sagawa@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

有界領域上の一般化された臨界 Hardy 不等式に関連する最小化問題

佐野 めぐみ* 大阪市立大学 理学研究科数物系専攻

キーワード：Hardy の不等式, 臨界ソボレフ空間, 最小化問題, 楕円型偏微分方程式

問題設定とその背景

劣臨界ソボレフ空間 $W_0^{1,p}(p<N)$ においては Sobolev 不等式や Hardy 不等式をはじめとし「不等式の成立・不成立」また「最良定数の値」, そして最良定数に付随した最小化問題の「最小化元の存在・非存在 (不等式の言葉では等号成立・不成立)」に関して非常によく研究が成されている. このような不等式に関する研究を行うことで, 楕円型方程式の解の存在・非存在や放物型方程式の時間大域的挙動 (blow-up か, global か) 等の研究へ役立てることができる. このように不等式は偏微分方程式を解析する際の重要な "道具" という面もあるが, 一方で不等式自身からも様々な現象が観測でき, それ自体が大変興味深い.

本講演では臨界ソボレフ空間 $W_0^{1,N}$ を扱いたい. 具体的には, 一般化された臨界 Hardy 不等式の最良定数に付随した次の最小化問題 (1) の「正値性 (i.e. 不等式の成立・不成立), 最良定数の値, 最小化元の存在・非存在」について考える.

$$G := \inf_{u \in W_0^{1,N}(\Omega)\setminus\{0\}} R(u), \quad \text{ただし } R(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^N \, dx}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^N (\log \frac{aR}{|x|})^\beta} dx \right)^{\frac{N}{q}}} \text{ とする.} \tag{1}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域, $0 \in \Omega$, $R := \sup_{x\in\Omega} |x|$, $a \geq 1, q > 1, \beta > 1$ とする. (1) の最小化元 u は, singular potential をもった次の楕円型 N ラプラス方程式の弱解となっている.

$$-\mathrm{div}\,(\,|\nabla u|^{N-2}\nabla u\,) = \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^N (\log \frac{aR}{|x|})^\beta} \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Ω が球かつ (a, q, β) が特別な関係を満たすときには, 既に最小化問題 (1) に関して様々な結果が得られている (講演中に紹介する). 本講演では一般の有界領域を扱う.

問題を理解する上で重要な事柄

1. ポテンシャル関数 $f_{a,\beta}(x) := |x|^{-N}(\log \frac{aR}{|x|})^{-\beta}$ は a と β によって形状や特異性の強さが変化する. 具体的には $a > 1$ の場合 (非シャープな場合), $f_{a,\beta}$ は原点にのみ特異性をもつのに対して, $a = 1$ の場合 (シャープな場合) は, 原点だけでなく境界の一部 $\partial\Omega \cap \partial B_R(0)$ にも特異性をもつ. さらに β は $f_{a,\beta}$ の特異性の強さを表しており, β が大きいほど原点での特異性は弱くなるのに対し, $a = 1$ のときは β が小さいほど境界での特異性は弱くなる.

2. $\beta = \frac{N-1}{N}q + 1$ かつ u が球対称関数のとき, スケーリング $u_\lambda(x) = \lambda^{-\frac{N-1}{N}} u\left(\left(\frac{|x|}{aR}\right)^{\lambda-1} x \right)$ $(\lambda > 0)$ に関して $R(u)$ は**スケール不変性**をもつ (ただし領域の変化は無視する).

*megumisano0609@st.osaka-cu.ac.jp

シンプレクティック空間上で表現された KdV 方程式の離散化

石川 歩惟 * 神戸大学 大学院システム情報学研究科

キーワード：幾何学的力学，離散力学，数値計算

1 概要

近年, 構造保存型数値解法と呼ばれる, 方程式のもつ構造を保つようにスキームを設計する手法が盛んに研究されている．この方法では, 汎用解法に比べて安定性に優れたスキームを得られる場合が多いことが経験的に知られている．

例えば, Hamilton 力学的手法の多くは, 線形空間 $\mathcal{M}$ 上の Hamilton 方程式

$$u_t = M\nabla_u\mathcal{H} \tag{1}$$

を対象とする．ここで, M は歪随伴作用素, $\nabla_x\mathcal{H}$ はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の x 方向の勾配をそれぞれ表す．また, 変分原理に基づく方法 [1] では, (1) をハミルトンフローとしてシンプレクティック空間 $(\mathcal{M},\omega)$ 上で記述したもの

$$X \lrcorner \omega = \mathrm{d}\mathcal{H}, \quad u_t = X \tag{2}$$

を対象とする．ただし, ω はシンプレクティック形式と呼ばれる, 閉かつ非退化な微分 2 形式で, $\mathrm{d}\mathcal{H}$ は Fréchet 微分である．

いずれも, 通常は常微分方程式に対する手法であり, 偏微分方程式に適用するためには, 対象となる方程式の Hamilton 構造を保つような, 適切な空間離散化が必要となる．(1) に対しては, 離散変分導関数法 [2] など, 対象が偏微分方程式の場合の研究も進んでいるが, [1] の方法で必要となる (2) の形の方程式に対するこのような研究は少ない．

そこで, 本発表では, 特に

$$u_t = \partial_x\frac{\delta G}{\delta u}, \quad \mathcal{H}(u) = \int_0^T G(u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

の形で記述される Hamilton 偏微分方程式を対象とした, $(\mathcal{M},\omega)$ 上での Hamilton 構造を保った空間離散化法について述べる．その際, KdV 方程式 $u_t = \partial_x(-\frac{1}{2}u^2 - \alpha^2u_{xx})$ を例に, 実際に [1] を適用して得られたスキームの挙動についても考察する．

参考文献

[1] A. Ishikawa and T. Yaguchi, *JSIAM Lett.*, **8** (2016), 53–56.

[2] D. Furihata, *J. Comput. Phys.*, **156** (1999), 181–205.

*a-ishikawa@stu.kobe-u.ac.jp

小さいポテンシャルを持つ非線形Schrödinger方程式における定在波解の軌道安定性

山添 祥太郎* 京都大学 情報学研究科

キーワード：非線形 Schrödinger 方程式，定在波解，安定性解析

概要

本研究は京都大学情報学研究科の矢ヶ崎一幸教授との共同研究である．

空間 1 次元において，小さいポテンシャルを持つ非線形 Schrödinger 方程式を考える．

$$\mathrm{i}\partial_t u = -\partial_x^2 u + \varepsilon V(x)u + \beta(|u|^2)u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{NLS}$$

ここで，$u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は未知関数，$\varepsilon \in \mathbb{R}$，ポテンシャル $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ および非線形性を表す関数 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は所与のものとする．(NLS) は弱い分散性を持った非線形波動を記述する方程式として物理学の様々な場面で現れる．例えば，量子物理においては Bose-Einstein 凝縮した粒子の時間発展を表す方程式として，光学においては光ファイバー中を伝わる波束を記述する方程式として知られている．

(NLS) の次の形の解を定在波解と呼ぶ：

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi_\omega(x).$$

ここで，$\omega > 0$，φ_ω は無限遠方で減衰する実数値関数である．$\varepsilon = 0$ のとき，(NLS) が ω について滑らかに依存する定在波解の族を持つことを仮定する．このとき，任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi_\omega(x - x_0)$ も定在波解であることに注意する．この仮定を満たす典型的な例としては，吸引的で冪乗型の非線形項 $\beta(|u|^2)u = -|u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ がある．

$0 < \varepsilon \ll 1$ のときを考える．Melnikov 関数 $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$M(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x + x_0)\varphi_\omega(x)\varphi'_\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

で定める．V に関する適当な仮定のもとで，x_0 が M の単純な零点のとき，ε をパラメータとして，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi_\omega(x - x_0)$ から分岐する (NLS) の定在波解が存在することが知られている．講演では，この分岐した定在波解の軌道安定性に関する結果を与え，いくつかの具体的な V と β について軌道安定/軌道不安定になる例を紹介する予定である．軌道安定性の証明は，Grillakis-Shatah-Strauss[1, 2] の議論と線形化作用素の解析を組み合わせることで行う．

参考文献

[1] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I, *J. Funct. Anal.*, **74** (1987) 160–197.

[2] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, II, *J. Funct. Anal.*, **94** (1990) 308–348.

*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ダイナミクスにおける時間遅れの構造をどのように理解するべきか？

西口 純矢* 京都大学理学研究科 数学教室 / 学振特別研究員 (DC2)

キーワード：時間遅れ，関数微分方程式，初期値問題，位相ダイナミクス，定数変化法

遅延微分方程式とは，時間変数 t をもつ微分方程式であって，未知関数の時間微分が未知関数の過去の値にも依存するものである．ダイナミクスは時間とともに変化するシステムの振る舞いであり，微分方程式や差分方程式のそれは典型例である．力学系理論はダイナミクスを数学的に扱う学問分野の 1 つであり，それは力学系的状態 (“dynamical state”) からなる相空間と，その上の時間発展を記述するルールから構成される．時間発展を記述するルールの存在は決定論的因果律を意味する．遅延微分方程式はその過去依存性 (hereditary effect) により，一見すると因果律を満たさないように思われる．しかし，各時刻における力学系的状態を未知関数の**履歴 (history)** と考えることで，遅延微分方程式のダイナミクスの概念を得ることができる．相空間は何らかの関数空間であり，ダイナミクスは無限次元である．**時間遅れの構造**は，ダイナミクスの無限次元性をもたらす 1 つの構造である．

時間遅れの構造はさまざまな数理モデルにおいて現われる．具体的な構造が分かっている場合もあれば，それがブラックボックスになっている場合もある．時間遅れが状態変数に依存する「状態依存遅れ」というのはその 1 つであり，困難が生じることが知られている (Walther [1])．時間遅れの構造についての十分な情報がないときに，どのように数学的解析を進めればよいのだろうか？ また，ネットワークの構造に時間遅れ相互作用を付加したとき，どこまでその情報を用いて解析すべきだろうか？

本講演では，時間遅れの構造における非線型項と過去依存性の 2 つをブラックボックスにした「**関数微分方程式**」の定式化を扱う (Hale & Verduyn Lunel [2])．この定式化において，初期値の空間は未知関数の履歴からなり，それは時間遅れが有限か無限か，状態依存遅れかどうか，未知関数の履歴をどのような位相で考えるかによって変わる．このような状況で，上記の問題をダイナミクスの観点から考えたい．この講演の主結果の 1 つは，「関数微分方程式が位相的ダイナミクスを生み出すための必要十分条件は，$\dot{x} = 0$ という自明な方程式の作る初期値の空間上の解半群が連続である」ということである．また，非斉次の線型関数微分方程式に対する定数変化法の正当化への応用についても述べる ([3])．

参考文献

[1] H.-O. Walther, *The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay*, J. Diff. Eqns. **195** (2003), 46–65.

[2] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, “Introduction to Functional Differential Equations,” Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] J. Nishiguchi, *Retarded functional differential equations with general delay structure: initial value problems and application to variation of constants formula*, in preparation.

*j-nishi@math.kyoto-u.ac.jp

計算機による二次元非圧縮流れパターンのコード化

川口　澄恵*　京都大学 大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

キーワード：二次元非圧縮流れ，流れパターンの tree 表現，パーシステントホモロジー

横山・坂上 ([1], [2]) により，多重連結領域内の二次元非圧縮流れの位相的パターンを記号や tree を用いた有限な表現により分類する方法が発見された．特に tree 表現は流れ場の位相同値類と 1 対 1 に対応することが示されており，それを用いれば，下図のように流れの位相構造を簡潔に表すことが可能となる．一方で，与えられた流れの tree 表現を具体的に求めるためには，これまでは目視と手作業により特徴的な流線を抽出する方法がとられていた．本研究では，流れ関数から tree 表現，もしくはそれに同値な正規表現と呼ばれる記号表現を，計算機を用いて自動的に求めるアルゴリズムを開発した．

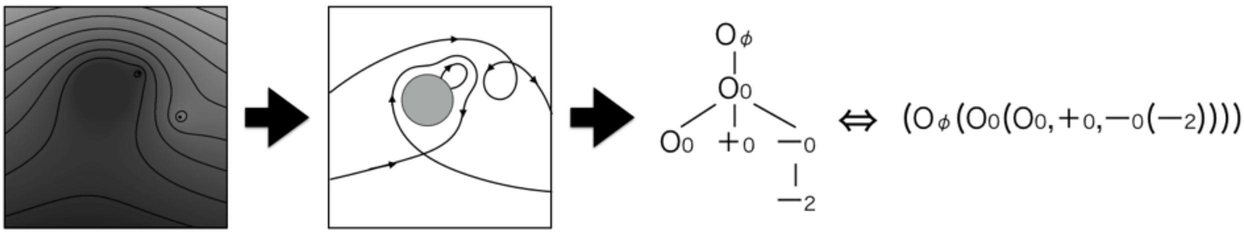

図 1: 流れと，流れに対応する tree 表現と，tree 表現に同値な正規表現

ホモロジーを用いると図形 (位相空間) の連結成分の個数や穴の個数などの位相的な情報を与えられるのに対し，パーシステントホモロジー ([3]) は図形のより精密な情報を取り出すことができる．本研究に関しては，与えられた流れの流れ関数の臨界点を含む等高線の高さなどの情報を，パーシステントホモロジーを用いて抽出することが可能となる．これを用いることで，与えられた流れの流れ関数データと多重連結領域の構造 (流れの障害物の位置) データに対して，パーシステントホモロジーを計算することで，指定された領域における正規表現を求めるアルゴリズムを与え，それを実装することができた．講演では，実際の計算例を示しつつ，そのアルゴリズムの概要について説明する．

参考文献

[1] T. Yokoyama and T. Sakajo, *Word representation of streamline topologies for structurally stable vortex flows in multiply connected domains*, Proc. Roy. Soc. A, vol. 469 (2013), 20120558.

[2] T. Sakajo and T. Yokoyama, *Tree representations of streamline topologies of structurally stable 2D incompressible flows*, preprint (2015).

[3] 平岡裕章, タンパク質構造とトポロジー (共立出版 2013)

*sumie-k@math.kyoto-u.ac.jp

粗い境界付近の粘性流体の数学解析

檜垣充朗* 京都大学理学研究科

キーワード：ナヴィエ-ストークス方程式，粗い境界，ナヴィエ壁法則，境界層

表面の粗い固体壁付近の流れの数理構造を調べることは，理学・工学の両分野で基本的な問題である．以下，粗い境界を持つ 2 次元非有界領域 $\Omega^\varepsilon = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon\omega(\frac{x_1}{\varepsilon}) < x_2 < \infty\}$ において次のナヴィエ-ストークス方程式の初期値境界値問題を考察する．

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon \;=\; 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \Omega^\varepsilon\,, \\ \nabla \cdot u^\varepsilon \;=\; 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x \in \Omega^\varepsilon\,, \\ u^\varepsilon(t, x_1, x_2)\,\text{is}\ 2\pi\text{-periodic in}\ x_1\,, \quad t \geq 0\,, \\ u^\varepsilon|_{t=0} \;=\; u_0\,, \quad x \in \Omega^\varepsilon\,. \end{cases}$$

粗い境界 $\partial\Omega^\varepsilon$ においては次の no-slip 境界条件 (Dirichlet 境界条件) を課す．

$$u^\varepsilon \;=\; 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega^\varepsilon\,.$$

ここで未知関数 $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon(t,x), u_2^\varepsilon(t,x))$ 及び $p^\varepsilon = p^\varepsilon(t,x)$ は流体の速度場及び圧力場である．初期速度場 u_0 は半空間 $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ 上の速度場 a のゼロ拡張で与えられると仮定し，境界関数 $\omega : \mathbb{R} \to (-1, -\frac{1}{2})$ は滑らかな周期 2π の関数であるとする．正数 $\varepsilon = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, は粗面 $\partial\Omega^\varepsilon$ の振幅とパルス幅 (すなわち "粗さ") を特徴づけるパラメータである．

粗面付近の流れの構造解析の手法として，流体力学におけるナヴィエ壁法則が知られている．ナヴィエ壁法則とは，粗面を平坦な境界としてモデル化する代わりに粗さに依存した境界条件を上手く課す手法であり，流れ u^ε の良い漸近形を得る上で有効である．

流体力学における壁法則の議論は形式的なものであるため，その数学的正当化は重要である．実は，ナヴィエ壁法則の正当化は，粗さ ε の零極限における流れ u^ε の挙動を境界層理論を用いて第一次近似まで明らかにする問題と直接的な関係がある．一方，このような展開の正当化には，ε 零極限で現れる解に対して高い正則性が要求される．近年文献 [2] で非定常問題が扱われたものの，初期速度場が零，外力が初期時刻付近で恒等的に零という特殊な仮定が課されており，初期時刻付近の正則性の損失による困難が取り除かれていた．

本発表では，自然な整合条件を満たす一般の C^1 級の初期値に対するナヴィエ壁法則の正当化に成功したことを報告する ([1])．壁法則の正当化に必要な ε 零極限流の正則性の精密な見積りを糸口として，半空間における L^∞ 空間での解の正則性理論とエネルギー法，及び境界層解析を組み合わせることにより，非定常問題特有の困難を解決する．

参考文献

[1] M. Higaki, Navier wall law for nonstationary viscous incompressible flows, J. Differential Equations 260 (10) (2016) 7358-7396.

[2] A. Mikelić, S. Nečasová, M. Neuss-Radu, Effective slip law for general viscous flows over an oscillating surface, Math. Models Methods Appl. Sci. 36 (15) (2013) 2086-2100.

*mhigaki@math.kyoto-u.ac.jp

Flow の解析と Helmholtz-Hodge 分解

須田　智晴 * 京都大学　人間・環境学研究科

キーワード：Flow Analysis; Vector Field Topology; Helmholtz-Hodge Decomposition.

概要

常微分方程式の解の挙動を調べることは基本的な問題であるが，比較的簡単な状況を除いてそれを解析的に行うことは難しい．そこで数値的にベクトル場を積分し，さらにその特徴をうまく捉えることが応用上必要となる．このための手法として「重要な解軌道」を取り出す方法 [1]，Conley theory を利用する方法 [2]，Helmholtz-Hodge 分解を用いる方法 [4] などが提案されている．ここではこれらの方法について簡単に紹介した後，Helmholtz-Hodge 分解を用いる方法について解説する．また，その数値的な解析が成立するための条件を述べる．

Helmholtz-Hodge 分解による解析

定理 1 (Helmholtz-Hodge 分解の存在と一意性 [3])**.**　$D \subset \mathbb{R}^3$ を有界で境界 ∂D が滑らかな領域とする．このとき，D 上の任意の（十分に滑らかな）ベクトル場 $\mathbf{F}$ は次の形に一意に分解される．

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \mathbf{u}.$$

ここで $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$，また ∂D 上で $\mathbf{u}$ は法線方向の成分をもたない, *i.e.* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

この設定は応用上よく使われるが [5]，その理由は次による．

定理 2. 領域 D 上で $\mathbf{u} \cdot \nabla V = 0$ のとき，$\frac{dV}{dt} \leq 0$ である．ただし $\frac{dV}{dt}$ は V の解に沿った微分を表す．

すなわち，領域全体で直交条件を課したときの Helmholtz-Hodge 分解から得られるポテンシャル関数は Lyapunov 関数を与える．ここで，領域全体での直交条件は $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ を適切な条件下では含意するため，このときは分解の一意性により境界条件から領域全体での直交性が得られる．

参考文献

[1] Helman, J., & Hesselink, L. (1989). Representation and display of vector field topology in fluid flow data sets. IEEE computer, 22(8), 27-36.

[2] Chen, G., Mischaikow, K. M., Laramee, R. S., Pilarczyk, P., & Zhang, E. (2006). Vector field editing and periodic orbit extraction using morse decomposition. Corvallis, OR: Oregon State University, Dept. of Computer Science.

[3] Chorin, A. J., Marsden, J. E., & Marsden, J. E. (1990). A mathematical introduction to fluid mechanics (Vol. 3). New York: Springer.

[4] Polthier, K., & Preuss, E. (2003). Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition. In Visualization and Mathematics III (pp. 113-134). Springer Berlin Heidelberg.

[5] Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V.,& Bremer, P. T. (2013). The Helmholtz-Hodge Decomposition; A Survey. IEEE Transactions on visualization and computer graphics, 19(8), 1386-1404.

[6] Tong, Y., Lombeyda, S., Hirani, A. N., & Desbrun, M. (2003, July). Discrete multiscale vector field decomposition. In ACM transactions on graphics (TOG) (Vol. 22, No. 3, pp. 445-452). ACM.

* suda.tomoharu.88s@st.kyoto-u.ac.jp

Self-Intersection Local Times of Brownian Motion

森　隆大[*]
京都大学 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系 M1

キーワード：Brown 運動

概要

Brown 運動は確率解析において最も基本的な確率過程の一つであり, その path の解析が詳細に行われている. 本講演ではその中で path の自己交差に関する性質を紹介する.

p-multiple self-intersection local time β とは, d 次元 Brown 運動 B が時刻 $[0,\infty)$ の間に p 重点を持つ頻度を表しており, 形式的には以下のように (ランダムな) 測度で定義できる:

$$\beta(A) := \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_A \prod_{j=1}^{p}\delta_0(B(s_j)-x)ds_1\cdots ds_p\right]dx,$$

ただし $A \subset \{(s_1,\cdots,s_p)\in(\mathbb{R}^+)^p | s_1<\cdots<s_p\}$.

Renormalized self-intersection local time γ とは, β の平均が 0 になるように中心化したものであり, $d=p=2$ のとき形式的に以下で定義できる:

$$\gamma(A) := \beta(A) - \mathbb{E}[\beta(A)].$$

$[0,1]^2_< := \{(s_1,s_2)\in[0,1]^2 | s_1<s_2\}$ とかいたとき, $\gamma([0,1]^2_<)$ の指数モーメントの有限性は実解析学と物理数学の両方と関連がある.

本講演では, 指数モーメント $\mathbb{E}\left[e^{\lambda\gamma([0,1]^2_<)}\right]$ が $\lambda=\kappa(2,2)^{-4}$ を境に収束・発散が変わるという定理 [2] を紹介する. ここで, $\kappa(2,2)$ は Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$||f||_4 \le C||\nabla f||_2^{1/2}||f||_2^{1/2} \quad ; f\in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$$

の最良定数である.

さらに γ を用いたポリマーモデルを設定し, 相転移が起こることを確認する.

参考文献

[1] Chen, X. (2010). Random Walk Intersections: Large Deviations and Related Topics. *Mathematical Surveys and Monographs* **157**. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[2] Bass, R. F., Chen, X. (2004). Self-intersection localtime: critical exponent and laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.* **32** 3221-3247

[*] tmori@kurims.kyoto-u.ac.jp

Markov 過程に関するエルゴード定理

世良 透* 京都大学 数学教室

キーワード：Markov 過程，エルゴード理論

概要

局所コンパクト第二可算な Hausdorff 空間 S 上の, Harris の意味で再帰的な Feller 過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ を考える. $\mathbb{P}_x$ を $x \in S$ から出発するときの X の分布, $\theta_s : (x_t)_{t\geq 0} \mapsto (x_{t+s})_{t\geq 0}$ を時間ずらし作用素とする. X の再帰性により S 上に不変測度 $\lambda \neq 0$ が定数倍を除き一意に定まる. すなわち, $\mathbb{P}_\lambda := \int_S \mathbb{P}_x \lambda(dx)$ とすると, 任意の $s \geq 0$ に対し $\mathbb{P}_\lambda \circ \theta_s^{-1} = \mathbb{P}_\lambda$ が成り立つ. また強エルゴード性という性質も成り立つ.

特に, λ が有限測度のとき（このとき X は正再帰的であるという）正規化して確率測度にとれて, Birkhoff の個別エルゴード定理より, S 上の確率測度 μ および有界可測関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対し $t \to \infty$ で

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \ \to \ \int_S f(x)\lambda(dx) \quad \mathbb{P}_\mu\text{-}a.s.$$

が成り立つことが分かる.

一方で λ が無限測度のとき（このとき X は零再帰的であるという）上のように t だけの関数で正規化して $\int_0^t f(X_s)ds$ を意味のあるものに概収束させるということは出来ない. しかしある条件の下では分布収束させることが出来る. 例えば $B = (B_t)$ を二次元 Brown 運動とすると, これは再帰的で, λ として $\mathbb{R}^2$ 上の Lebesgue 測度がとれる. このとき有界可測かつ λ に関し可積分な関数 f で $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx \neq 0$ なるものに対し

$$\frac{2\pi}{\log t}\int_0^t f(B_s)ds \ \to \ \mathcal{E}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx \ \ \textit{in distribution}$$

が成り立つ. ここに $\mathcal{E}$ はパラメータ 1 の指数分布に従う確率変数である.

以上は連続時間で考えたが離散時間の Markov 過程に関しても同様のことが言える. 講演では上記のような Markov 過程に関するエルゴード的性質を紹介する.

参考文献

[1] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, Mathematical Surveys and Monographs 50, American Mathematical Society, Providence RI, USA, 1997.

[2] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Second Edition, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] G. Kallianpur and H. Robbins, *Ergodic property of the Brownian motion process*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **39** (1953), 525-533.

*sera@math.kyoto-u.ac.jp

PCS過程とバリアオプション

浜口 雄史* 京都大学 理学研究科

キーワード：数理ファイナンス,put-call symmetry, 確率微分方程式

概要

金融市場において最も基本的な派生商品として, ヨーロピアン型のプットオプションおよびコールオプションがある. 株価過程 S が利子率 0, 配当金 0 のブラック・ショールズモデルに従う (このとき,S はドリフト無し幾何ブラウン運動である) とき, これらのオプションの間には put-call symmetry(以下,PCS) という対称性が成立する. すなわち,$C(T,k;x)$,$P(T,k;x)$ をそれぞれ現在株価 x, 満期 T, 行使価格 k のヨーロピアンコール, プットの価格としたとき,

$$C(T,K;S_0) = P(T,S_0;K) \tag{1}$$

が成立する.

Carr-Lee[1] は, 任意の非負可測関数 G に対し

$$\mathbf{E}_0 G(M_T) = \mathbf{E}_0[\frac{M_T}{M_0}G(\frac{M_0^2}{M_T})] \tag{2}$$

が成立するような正値確率過程 $(M,\mathcal{F},\mathbf{P})$ を PCS 過程と定義し, その同値条件を示した. ここで,$G(x)=(x-K)^+$ とすることにより, 上で述べたヨーロピアンオプションに関する PCS が従うことがわかる.

PCS 過程は様々な金融派生商品、特にバリアオプションのヘッジに応用される. ここでバリアオプションとは, 原資産価格がある一定の価格 (バリア) に到達するか否かで, 権利が発生したり消滅したりするオプションである.

本講演では [1] に従って,PCS を満たすための確率微分方程式に関する十分条件を述べ, オプションヘッジへの応用を紹介する.

参考文献

[1] Carr,Peter and Lee,Roger;Put-call symmetry: extensions and applications. Math. Finance 19 (2009), no. 4, 523-560.

[2] Als,Elisa and Chen,Zhanyu and Rheinlnder,Thorsten;Valuation of barrier options via a general self-duality.Math. Finance 26 (2016), no. 3, 492-515.

[3] Rheinlnder,Thorsten and Schmutz,Michael;Self-dual continuous processes. Stochastic Process. Appl. 123 (2013), no. 5, 1765-1779.

*hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp

First Passage Percolation and its related topic

中島秀太* 京都大学 数理解析研究所　博士後期課程 1 年

キーワード：First Passage Percolation, optimization problem, random environment

概要

伝染病は、病原体がその宿主から他の個体へと移り、連鎖的に感染者数が拡大する伝染性の病気である。それらを数理モデルに置き換える際、例えば接触感染を考えたとしても、接触した時必ず感染するとは限らず、さらに「接触」という個体それぞれの行動に依存する極めて複雑なものを正確に記述することは至難の業である。そのような状況の中でひとつの実現の方法は適当なランダム環境を与え、伝染速度をランダム環境に依存する形で割り当てるというものである。First Passage Percolation(FPP) はそのような実現の一つであり、動的な伝染モデルとして 1965 年に Hammersley と Welsh により導入された。以下で具体的な定義を述べる。

モデルの定義

隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) :\ \pi \text{は} x \text{から} y \text{への路}\}.$$

で定義し、最小移動時間を与える路を optimal path と呼ぶことにする。ここで $t \in [0,\infty)$ について $B(t) := \{x \in \mathbb{Z}^d :\ T(0,x) \le t\}$ とすると時刻 t までに到達できる集合となる。

病原体が辺 e の移動にかかる時間を τ_e と考えると、$T(0,x)$ は原点で病原体が発生してから x が感染するまでにかかる時間、$B(t)$ は時刻 t での感染者の集合を表している。

講演内容

このように FPP は応用的な側面を持つ一方で、その数学的内容の豊富さにより、多くの純粋数学的な研究がなされてきた。本講演ではそのような FPP の中心課題における先行研究を紹介するとともに optimal path の最大辺移動時間に関する最近の結果を述べる。

参考文献

[1] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation, 2015. ArXiv e-print 1511.03262.

*njima@kurims.kyoto-u.ac.jp

トーラス上の渦力学

清水 雄貴* 京都大学 理学研究科

キーワード：geometric vortex dynamics

曲面 (M,g) 上の非圧縮非粘性流体で渦度が delta 関数の線形結合で書かれるものを点渦力学系と呼び，その係数 $\{\Gamma_m\}_{m=1}^N$ を渦の強度という．流体力学的 Green 関数 G_H は

$$\triangle G_H(\zeta,\zeta_0)=\begin{cases}\delta_{\zeta_0}-\frac{1}{\mathrm{Area}(M)} & \text{if } M \text{ is compact,}\\ \delta_{\zeta_0} & \text{if } M \text{ is non-compact,}\end{cases} \tag{1}$$

の弱解であって相反条件，$G_H(\zeta,\zeta_0)=G_H(\zeta_0,\zeta) \quad (\zeta,\zeta_0\in M)$, を満たす関数として定義され，Robin 関数 R は G_H の測地的距離 d により正則化した関数

$$R(\zeta)=\lim_{\zeta_0\to\zeta}\left[G_H(\zeta,\zeta_0)-\frac{1}{2\pi}\log d(\zeta,\zeta_0)\right], \tag{2}$$

として定義される．強度 $\{\Gamma_m\}_{m=1}^N$ の点渦力学系に対し m 番目の渦の複素座標での位置 ζ_m は次の常微分方程式を満たす．

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_m}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{-1}\lambda^{-2}(\zeta_m)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_m}\left[\sum_{j\neq m}^{N}\Gamma_j G_H(\zeta_m,\zeta_j)+\frac{1}{2}\Gamma_m R(\zeta_m)\right]. \tag{3}$$

但し λ は conformal factor である．この力学系は G_H と R によって与えられるため，曲面の幾何構造による影響を強く受ける．一方これまでは単連結であるかまたは定曲率であるような曲面に限りそこでの渦運動の挙動の詳細な解析が可能であった．近年になり Green & Marshall[2] によって単連結でも定曲率でもない曲面である Euclid 空間に標準的に埋め込まれたトーラスにおける Green 関数の解析表示が与えられ，[1] ではこれを用いてトーラス上の点渦方程式の解析表示が導かれた．本研究の目的は曲面の幾何構造がその上の渦運動へ及ぼす影響を理解することにあり，講演では単連結でも定曲率でもない曲面に固有の点渦相互作用を紹介する．そこで幾つかの理論的な困難がある．一つは点渦方程式が複素座標上で導出されるため，トーラス含め単連結でない曲面上では点渦方程式の coordinate-free な表示が必要である．これに対して [1] では点渦方程式がある symplectic 多様体上の Hamiltonian ベクトル場と一致するように相空間と symplectic 形式, Hamiltonian を構成することで，点渦方程式の coordinate-free な表示を与えた．さらにある第一積分を発見し，2 点渦問題が完全可積分であることを示した．その結果それまでの曲面上の渦運動には見られなかった挙動を見出すことに成功した．本講演は坂上貴之氏（京都大学）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] T. Sakajo and Y. Shimizu, Point vortex interactions on a toroidal surface, *Proc. Roy. Soc. A*, **472** (2016) 20160271. (doi:10.1098/rspa.2016.0271)

[2] C.C.Green and J.S.Marshall, Green's function for the Laplace-Beltrami operator on a toroidal surface, *Proc. Roy. Soc. A*, **469** (2012) 20120479.(doi:10.1098/rspa.2012.0479)

*shimizu@math.kyoto-u.ac.jp

解析的に非可積分な解ける微分方程式について

山中 祥五 * 京都大学 情報学研究科

キーワード：可積分判定, Poincaré-Dulac 標準形

概要

n 次元微分方程式に対して, p 個の可換なベクトル場とそれぞれの保存量となる q 個の関数が存在し, $p+q=n$ となるとき, 微分方程式は可積分であると言われる. ベクトル場と関数が解析的 (または, 有理型) であれば, 解析的に (または, 有理型的に) 可積分であると言われる.

可積分判定は一般的に難しいが, 有理型的に可積分であれば特解周りの変分方程式の微分ガロア群は可換な単位成分を持つ [1]. これにより, 非可積分性を示すことができる場合がある. しかし, 特解やその変分方程式が簡単に書けることは稀である. そこで, 平衡点周りでの標準形を考えることで, 可積分性を考える. ハミルトン系において, Birkhoff 標準形の共鳴次数が 1 以下のときは可積分であるが, そうでないときは非可積分な例があることが知られている. この類似の結果が, 一般的に成り立つことがわかった. つまり, Poincaré-Dulac 標準形に対し共鳴次数を定義し, それが 1 以下であれば解析的に可積分であるが, 2 以上なら解析的に非可積分な例があることがわかった [2]. 実は, ここで出てきた非可積分な微分方程式の解は簡単に書ける.

本発表では, 可積分の概念を調べるモチベーションについて説明し, 非可積分であるにも関わらず解ける微分方程式に対する解釈を与える.

参考文献

[1] M. Ayoul, N. T. Zung, Galoisian obstructions to non-Hamiltonian integrability, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), no.23-24, 1323–1326.

[2] S. Yamanaka, Local analytic integrability of Poincaré-Dulac normal forms, in preparation.

---

* s.yamanaka@amp.i.kyoto-u.ac.jp

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題

野場 啓* 京都大学 理学研究科

キーワード：確率論，Lévy 過程

実数値の確率過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ がある区間から脱出する時刻の分布を特徴づける問題を X に対する脱出問題という．ここでは，二つの実数 $a > b$ と非負実数 $q \geq 0$, X の通過時刻 $\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t > a\}$, $\tau_b^- = \inf\{t > 0 : X_t < b\}$ に対し，期待値 $\mathbb{E}_0^X \left(e^{-q\tau_a^+} 1_{(\tau_a^+ < \tau_b^-)} \right)$ を求める問題を考える．

X を spectrally negative な Lévy 過程としたとき, X に対する脱出問題はスケール関数を用いて表すことができる．スケール関数は, X の Laplace 指数を用いて Laplace 変換により定義される．また, 脱出問題の応用として, ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表すことができる．

Kyprianou and Loeffen [1] は, 屈折 Lévy 過程 U に対する脱出問題を論じた．彼らの屈折 Lévy 過程 U は, 値 0 を超えるまでは spectrally negative な Lévy 過程 X に従って動き, 0 を超えたときに下向きにドリフト α がかかる．詳しく言うと, spectrally negative な Lévy 過程 X に対し, 屈折 Lévy 過程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ は, 確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > 0\}} ds, \quad t \geq 0 \tag{0.1}$$

の解として定義される．

本講演では [2] に基づき, まず Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した確率過程, つまり X, Y を異なる spectrally negative な Lévy 過程として, 正の値をとるときは X の挙動を, 負の値をとるときは Y の挙動をする確率過程 U を定義する．詳しく述べると, 確率過程 U を, X が有界変動な標本路を持つときは X と Y を独立として, 確率微分方程式の解として定義し, また, X が非有界変動な標本路をもち Gaussian part を持たないときはを周遊理論を用いて構成する．さらに, 本講演では複合 Poisson 過程による近似と脱出問題, ポテンシャル測度について考察する．

参考文献

[1] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46 (2010), no. 1, 24–44.

[2] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.

*knoba@math.kyoto-u.ac.jp

Propagation of boundary-induced discontinuities in radiative transfer

川越 大輔* 京都大学大学院 情報学研究科

キーワード：微分積分方程式, 不連続性

Ω を帯状領域 $\mathbb{R}^2 \times (0,1)$, S^2 を $\mathbb{R}^3$ の単位球面とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\xi \cdot \nabla I(x,\xi) - \mu_t I(x,\xi) + \mu_s \int_{S^2} p(\xi \cdot \xi') I(x,\xi')\, d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x,\xi') \in \Omega \times S^2. \tag{1}$$

ただし, $\cdot$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の Euclid 内積, $d\sigma$ は S^2 上の面素とする. ここで, μ_t および μ_s は非負の定数で, $\mu_t > \mu_s$ を満たす. また, p は閉区間 $[-1,1]$ 上の非負値連続関数で, 任意の $\xi \in S^2$ に対して

$$\int_{S^2} p(\xi \cdot \xi')\, d\sigma_{\xi'} = 1$$

が成り立つと仮定する. 本講演では, 方程式 (1) を定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には通常, 次の境界条件が課される. まず, 境界 Γ_- を次のように定義する. $\partial\Omega$ 上の点 x に対して, $n(x)$ を点 x における $\partial\Omega$ の外向き単位法線とすると,

$$\Gamma_- := \{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^2 | n(x) \cdot \xi < 0\}.$$

そして, I_0 を Γ_- 上の関数として, 次の境界条件を課す:

$$I(x,\xi) = I_0(x,\xi), \quad (x,\xi) \in \Gamma_-. \tag{2}$$

最後に, 定常輸送方程式の境界値問題の解を定義する. $(\Omega \times S^2) \cup \Gamma_-$ 上の関数 I が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1) - (2) の解であるという.

$$\begin{aligned} I(x,\xi) &= \exp(-\mu_t \tau_-(x,\xi)) I_0(x - \tau_-(x,\xi)\xi, \xi) \\ &\quad + \mu_s \int_0^{\tau_-(x,\xi)} \exp(-\mu_t\, s) \int_{S^2} p(\xi,\xi') I(x - s\xi, \xi')\, d\sigma_{\xi'}\, ds, \quad (x,\xi) \in (\Omega \times S^2) \cup \Gamma_-. \end{aligned}$$

ただし, $\tau_-(x,\xi)$ は

$$\tau_-(x,\xi) := \inf\{t > 0 | x - t\xi \notin \Omega\}$$

で定義される $(\Omega \times S^2) \cup \Gamma_-$ 上の関数である.

本講演では, この解の存在と一意性, さらに境界値の不連続性が解の不連続性としてどのように伝播するかについて述べる.

参考文献

[1] K. Aoki, C. Bardos, C. Dogbe, F. Golse, A note on the propagation of boundary induced discontinuities in kinetic theory, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 11, no. 9 pp. 1581–1595, (2001).

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

極大消散作用素に対応するExtrapolationの存在及び発展方程式への応用

蓑島 淳* 京都大学 理学研究科 数学教室

キーワード：極大消散作用素，extrapolatipn，発展方程式

X を $Banach$ 空間、$A\,(t)$ を $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ でパラメータ付された X 上の作用素としたとき,

$$u'(t) = A(t)u(t), where\ u(t)\ is\ a\ X\ valued\ function. \tag{1}$$

を発展方程式という. 物理的には発展方程式は系の時間変化が過去の状態には依らず、現在の時刻の物理量のみによって定まるような系の時間発展を記述しているとみなせる. $A(t) = A$ が時間に依らない線形作用素である場合を考える. このような例として例えば, $X = L^2(\Omega), where\ \Omega \subset \mathbb{R}^n. D(A) = \{u \in H_0^2(\Omega); \Delta u \in X\}, Au = \Delta u\ on\ D(A)$ がある. これは熱方程式の Dirichlet 問題を考えることに対応している.

A を Banach 空間 X 上の線形作用素としたとき $\|u\| \leq \|u - \lambda Au\|, for\ all\ u \in X\ and\ \lambda > 0$ を満たすものを X 上消散的といい、消散的かつ X 上の作用素 $I - \lambda A$ が任意の$\lambda > 0$ について全射 であるとき X 上極大消散的であるという. A が X 上稠密な定義域をもっており、かつ極大消散的であるとき、Hille-yoshida の定理により A で生成される縮小半群が存在する. この時、式 (1) の初期値問題を考えると $u(0) \in D(A)$ ならば縮小半群の存在により、初期値問題に一意解が存在することが示される. だが $u(0) \in X$ のときは解が存在するとは限らない. 後者の問題は、具体的なモデルへの応用上は、空間的になめらかでない初期値を与えることに相当していいることが多い. 物理においてはしばしばみられる問題である.

A が X 上稠密な定義域をもつ極大消散的な線形作用素のとき、Banach 空間 $\overline{X}$ と $\overline{X}$ 上極大消散的な作用素 $\overline{A}$ で、X は $\overline{X}$ 上稠密、$D(\overline{A}) = X$ かつ、$\overline{A}$ が A の拡大となるものが、同型を除いて一意存在する. この $(\overline{X}, \overline{A})$ を (X, A) の extrapolation と呼ぶ. 式 (1) の発展方程式を

$$u'(t) = \overline{A}(t)u(t), where\ u(t)\ is\ a\ \overline{X}\ valued\ function. \tag{2}$$

に拡張することによって、$u(0) \in X(= D(\overline{A}))$ の初期値問題に式 (2) の意味での一意解の存在を示せる. 式 (1) の解ならば式 (2) の解であるが、逆は必ずしも成立するとは限らないという意味で、式 (2) の解は (1) の解の弱解と呼ばれるものに相当する. extrapolation 上の解が (1) の解となる条件を調べるという形で定式化することにより、発展方程式の初期値問題をより精密に研究することが可能となる. 講演では稠密な定義域をもつ極大消散的な作用素に対応する extrapolation の存在の証明をし、時間が許せば発展方程式への簡単な応用を述べたい.

参考文献

[1] T.Cazenave and A. Haraux, *An introduction to Semilinear Evolution Equation*, (Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 2013)

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, (Springer-Verlag, New York)

*jun1861@math.kyoto-u.ac.jp

Schrödinger mapsおよびCoulomb gaugeによる表現

清水 一慶* 京都大学 理学研究科

キーワード : Schrödinger maps，Coulomb gauge

N を Riemann 面，$m \geq 1$ とする．Schrödinger maps とは次の方程式を満たす写像 $u = u(x,t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to N$ のことを指す:

$$\partial_t u = JD^k \partial_k u.$$

但し，∂_t は t に関する微分，∂_k は k 番目の空間変数に関する微分，D^k は k 番目の空間変数における共変微分，J は N の複素構造を表す．特に $N = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ の場合，Schödinger maps は

$$\partial_t u = u \times \Delta u$$

と表され，強磁性体の連続モデルを記述する際に現れる方程式として知られている．

Schrödinger maps を解析する際に用いられる有効な手段として，Coulomb gauge と呼ばれる $u^{-1}TN$ の orthonormal frame を用いて方程式を書き下す手法がある．この手法により Schrödinger maps は比較的解析しやすい非線形 Schrödinger 方程式に帰着させることができる場合がある．本講演では，$m = 1$ の場合に具体的にこの手法を説明することを目指す．

参考文献

[1] N. H. Chang, J. Shatah, and K. Uhlenbeck, *Schrödinger maps*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **53**, (2000), no. 5, 590-602.

*ishimizu@math.kyoto-u.ac.jp

主値積分の形状微分を用いた定常渦斑の数値計算

宇田 智紀 * 京都大学数学教室

キーワード：数値流体力学，Euler 方程式，定常渦斑，形状微分

概要

2 次元 Euler 方程式の解として，一定渦度領域をもつ**渦斑**が知られ，渦力学におけるもっとも基本的な解の一つとして活発に研究が行われている．渦斑領域は流れの速度場にしたがって時間発展しその形状を変えるが，定常渦斑の問題は時間発展で渦斑の形状が変化しないような解を求める自由形状問題である．これは，渦斑境界の運動を記述する等高線力学の定式化のもとで（相対的）平衡状態を求めることに相当し，積分路を未知とする積分方程式に帰着できる．

複素平面 $\mathbf{C}$ を流れ領域とする Euler 流で，渦度の強さ ω の渦斑 D が誘導する速度場は

$$u - iv = \frac{\omega}{2\pi i}\iint_D \frac{\mathrm{d}w_1\,\mathrm{d}w_2}{z-w} = \frac{-\omega}{4\pi}\mathrm{p.v.}\oint_{\partial D} \log\left(z-w\right)\mathrm{d}\overline{w} \tag{1}$$

で与えられる．ここで，記号 p.v. は Cauchy の主値を意味する．一般に，渦斑が誘導する速度場は，このような特異積分によって記述される．

等高線力学の（相対的）平衡状態の数学解析・数値解析を行う上で，(1) の積分路 ∂D に関する**形状微分**が重要な役割を果たすと考えるのは自然であろう．しかしながら，従来よく知られている領域積分型あるいは境界積分型の形状微分公式は，被積分関数に十分な滑らかさを仮定するものであり (1) には適用できない．そこで本研究では (1) のような積分に適用可能な形状微分（ここでは Gâteaux 微分；d で表記）の公式を導出した．

定理 1 (特異な周回積分の形状微分)**.** $z \neq w$ で定義された C^1 級複素数値関数 $\varphi\left(z,\overline{z},w,\overline{w}\right)$ を考える．φ は良い性質をもつと仮定する（$z \to w$ で log 程度の特異性を持っていても良い）．媒介変数表示 f をもつ *Jordan* 曲線 $C\left(f\right)$ に対し，形状依存の写像 $\mathcal{F}$ を次で定める：

$$\mathcal{F}\left(f\right) \coloneqq \mathrm{p.v.}\oint_{C(f)} \varphi\left(z,\overline{z},w,\overline{w}\right)\mathrm{d}w. \tag{$\diamondsuit$}$$

このとき，$\mathcal{F}$ の δf 方向への *Gâteaux* 微分は以下で与えられる：

$$\mathrm{d}\mathcal{F}\left(f;\delta f\right) = \mathrm{p.v.}\oint_C \mathrm{d}\varphi\left(z,w;\delta z,\delta z\right)\mathrm{d}w + 2i\oint_C \varphi_{\overline{w}}\,\mathrm{Re}\Big[\left(\delta w - \delta z\right)\overline{\left(-i\,\mathrm{d}w\right)}\Big]. \tag{$\heartsuit$}$$

ただし，$\delta z \coloneqq \delta f \circ f^{-1}\left(z\right)$ および $\delta w \coloneqq \delta f \circ f^{-1}\left(w\right)$ と表記した．

この公式を用いて定常渦斑問題に対する数値計算を行った．数値計算では，Pierrehumbert 渦斑対や Crowdy の解析的渦斑などを精度良く再現できることを確認した．講演では他にも新しい数値結果を紹介する予定である．

*uda@math.kyoto-u.ac.jp

渦層の相互作用による特異点の出現と渦の巻き上げの数値計算

後藤田 剛* 京都大学 理学研究科 数学教室

キーワード：数理流体力学, Vortex sheets, Point vortex approximation

非粘性流体中の二次元 Vortex Sheet の時間発展については Birkhoff-Rott 方程式と呼ばれる微分積分方程式によって記述される．ここで, 二次元 Vortex Sheet とは曲線上に線密度の渦が分布している状態を指す．この方程式については, その線形化方程式が Kelvin-Helmholtz 不安定性により Hadamard の意味で ill-posed であることから, 不適切な問題であることが指摘されている．一方で, 初期値が解析的なら Cauchy-Kowalewski の定理により解析的な時間局所解が存在することが証明できるため [4], この解が有限時刻で解析性を失うかどうかが問題となる．しかし, 一般に Birkhoff-Rott 方程式の数学解析は容易ではなく, 非適切性の数学的な証明はされていない．一方で, Moore は形式的な漸近解析の手法を用いて, 定常解に微小摂動と加えた初期値について, 有限時刻で Vortex Sheet の曲率が発散することを示している [3]. Krasny は同初期値に対する解の時間発展を点渦近似によって数値計算し, Moore の求めた有限時刻における解の爆発を実証した [1]. また, [2] では Vortex blob Method と呼ばれる方法で正則化した Birkhoff-Rott 方程式における解の時間発展を数値計算し, 結果として Vortex Sheet 解は爆発時刻を越えて計算することができ, さらには渦の巻き上げ現象が起こることが示されている．本研究では 2 層の Vortex Sheet の時間発展について数学解析や数値計算を行い, 上記の先行研究との比較を通して, Vortex Sheet 間の相互作用による爆発解の性質の変化や, 正則化方程式における渦の巻き上げ現象について考察した．なお, 本研究はミシガン大学の Robert Krasny 教授との共同研究である．

参考文献

[1] Krasny, R.: A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation. J. Fluid Mech. **167** 1986, 65-93.

[2] Krasny, R.: Desingularization of periodic vortex sheet roll-up. J. Comput. Phys. **65** 1986, 292-313.

[3] Moore, D. W.: The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet. Proc. R. Soc. Lond. A **365** 1979, 105-119.

[4] Sulem, C., Sulem, P. L., Bardos, C. and Frisch, U.: Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability. Commun. Math. Phys. **80** 1981, 485-516.

*gotoda@math.kyoto-u.ac.jp

一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式の大域解について

成亥　隆恭 * 京都大学 理学研究科

キーワード：孤立波解, 変分法, 非線形シュレディンガー方程式, 微分型非線形項

1　導入

本研究は林雅行氏 (早稲田大学) と深谷法良氏 (東京理科大学) との共同研究である. 本講演では, 以下の一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i|u|^{2\sigma}\partial_x u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{gDNLS}$$

ここで, $\sigma \geq 1$ とする. $\sigma = 1$ のとき, Wu はゲージ変換と Gagliardo–Nirenberg の不等式を用いることで, $\|u_0\|_{L^2}^2 < 4\pi$ ならば解が大域的になることを示した ([3]). 本講演では, 一般の σ の場合に大域解の存在について考える.

2　系

方程式 (gDNLS) は以下で定義されるエネルギー E, 質量 M, 運動量 P が保存する.

$$\begin{aligned} E(u) &:= \frac{1}{2}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\sigma+2}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i|u|^{2\sigma}\overline{u}\partial_x u dx, \\ M(u) &:= \|u\|_{L^2}^2, \\ P(u) &:= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\partial_x u\overline{u} dx. \end{aligned}$$

本研究では, 変分法の議論を用いることで, 一般の σ に対して大域解の存在が得られた. ($\sigma = 1$ のときは Miao–Tang–Xu [2] が我々とは独立に証明している.) この手法 (変分法) により $\sigma = 1$ のとき, Wu の結果の別証明を与えることができる. さらに以下の系が得られる.

系 2.1. *$\|u_0\|_{L^2}^2 = 4\pi$ かつ $P(u_0) < 0$(または $P(u_0) = 0$ かつ $E(u_0) \leq 0$)ならば, 解 u は時間大域に存在する.*

参考文献

[1] Noriyoshi Fukaya, Masayuki Hayashi, Takahisa Inui, *Global Well-Posedness on a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, preprint, arXiv:1610.00267.

[2] Changxing Miao, Xingdong Tang, Guixiang Xu, *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equation with derivative*, preprint.

[3] Yifei Wu, *Global well-posedness on the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Anal. PDE **8** (2015), no. 5, 1101–1112.

* inui@math.kyoto-u.ac.jp