

第7回白浜研究集会

プログラム&アブストラクト

2015年12月7日から10日

紀州・白浜温泉 旅館むさし

12月 7 日（月）		12月 8 日（火）		12月 9 日（水）		12月10日（木）	
		座長：鈴木		座長：後藤田		座長：山添	
		9:30-10:10	小澤	9:30-10:10	蘆田	9:30-10:10	後藤田
		10:15-10:55	鈴木	10:15-10:55	戌亥	10:15-10:55	阿部
		11:00-11:40	北別府	11:00-11:40	坂本	11:00-11:40	嶺山
		昼食（2時間）					
		座長：宇田		座長：坂本			
		13:40-14:20	濱田	13:40-14:20	宇田		
		14:25-15:05	寺田	14:25-15:05	赤岩		
		15:10-15:50	川越	15:10-15:50	古賀		
		休憩（20分）					
		ショートコミュニケーション					
		座長：西口		座長：蘆田			
		16:10-16:30	川口	16:10-16:30	鳥生		
		座長：戌亥		16:30-16:50	後藤	16:30-16:50	中島
15:00-15:40	西口	座長：蘆田		座長：西口			
15:45-16:25	石川	16:55-17:15	山野	16:55-17:15	山中		
16:30-17:10	山添	17:15-17:35	大垣	17:15-17:35	須田		

プログラム

12 月 7 日 (月)

- 15:00–15:40 西口 純矢 (京都大学 数学教室 D2)
Dynamics of functional differential equations
- 15:45–16:25 石川 歩惟 (神戸大学 システム情報学研究科 M1)
変分原理による離散勾配法のピアノシミュレーションへの応用
- 16:30–17:10 山添 祥太郎 (京都大学 情報学研究科 D2)
ある非線形 Schrödinger 方程式系に現れるソリトン解の分岐と安定性

12 月 8 日 (火)

- 9:30–10:10 小澤 龍ノ介 (京都大学 数学教室 PD)
空間列の集中と粗い曲率次元条件
- 10:15–10:55 鈴木 康平 (京都大学 数学教室 D3)
RCD 空間上の Brown 運動の収束について
- 11:00–11:40 北別府 悠 (京都大学 数学教室 PD)
低次元 RCD 空間の分類について

昼食 (2 時間)

- 13:40–14:20 濱田 実樹 (奈良女子大学 人間文化研究科 D2)
時間遅れを伴う造血幹細胞動態モデル
- 14:25–15:05 寺田 裕 (京都大学 情報学研究科 D2)
結合振動子系でカオスを発生させる結合ネットワークのサンプリング
- 15:10–15:50 川越 大輔 (京都大学 情報学研究科 D1)
1 次元定常輸送方程式の解の正則性解析

休憩 (20 分)

ショートコミュニケーション

16:10–16:30 川口 澄恵（京都大学 数学教室 M1）

ホモロジーによる画像解析

16:30–16:50 後藤 貴宏（京都大学 情報学研究科 M1）

Poincaré-Bendixson の定理の高次元系への拡張

16:55–17:15 山野 祥英（京都大学 数学教室 M1）

ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の大域挙動の分類

17:15–17:35 大垣 元紀（京都大学 数学教室 M1）

Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation の紹介

12 月 9 日（水）

9:30–10:10 蘆田 聡平（京都大学 数学教室 D1）

N 体シュレディンガー作用素の 2 つのクラスターを含むチャネルに対する伝播評価

10:15–10:55 成玄 隆恭（京都大学 数学教室 D2）

Dirac のデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類

11:00–11:40 坂本 祥太（京都大学 人間・環境学研究科 D2）

非切断 Boltzmann 方程式の Chemin-Lerner 空間における大域解

昼食（2 時間）

13:40–14:20 宇田 智紀（京都大学 数学教室 D2）

定常渦斑の数値計算法とその数値検証に向けた展望

14:25–15:05 赤岩 香苗（京都大学 情報学研究科 PD）

TN 行列の逆固有値問題と離散可積分系

15:10–15:50 古賀 一基（京都大学 情報学研究科 M2）

液滴の曲率と Topological Singularities

休憩（20 分）

ショートコミュニケーション

16:10–16:30 鳥生 梓（京都大学 数学教室 M2）

マルコフ切替を持つ拡散過程の漸近安定性

16:30–16:50 中島 秀太（京都大学 数理解析研究所 M2）

準安定性と界面モデル

16:55–17:15 山中 祥五（京都大学 情報学研究科 M1）

ホモ/ヘテロクリニック軌道近傍における一般的な力学系の可積分性の判定

17:15–17:35 須田 智晴（京都大学 人間・環境学研究科 M1）

On the Gradient-Hamiltonian Decomposition and Existence of Limit Cycles

12 月 10 日（金）

9:30–10:10 後藤田 剛（京都大学 数学教室 D2）

特異渦の解析を通じたエンストロフィー散逸現象のメカニズムの理解

10:15–10:55 阿部 圭宏（京都大学 数理解析研究所 D3）

対称な木の上を動くランダムウォークの局所時間

11:00–11:40 嶺山 良介（大阪大学 理学研究科）

ヒルベルト幾何と粗幾何学

Dynamics of functional differential equations

西口 純矢* 京都大学数学教室 D2 / 学振特別研究員 (DC2)

キーワード：functional differential equations, 無限次元力学系

1 背景：常微分方程式

t が実の独立変数であり x が従属変数であるような未知の関数 $x = x(t)$ が満たす方程式 $\dot{x} = f(x)$ を 1 階の自励系常微分方程式 (ODE) とよび、各 t に対して $x'(t) = f(x(t))$ を満たすような写像 $x(\cdot): t \mapsto x(t)$ を解とよぶ。ここで、 $x'(t)$ は $x(\cdot)$ の t における微分係数である。ODE が与えられたときにその解がどのようなものであるかというのは興味の対象であるが、3 体問題などで知られているように一般には具体的に解を書き下すことはできない。そのような場合でも、解 $x(t)$ の “long term behavior” を調べることで方程式の解の性質を調べるというのが力学系 (dynamical system) 理論の考え方であり、Poincaré により創始されたものである。

Newton の第 2 法則から得られる運動方程式は ODE の典型例である。質量 m, M をもつ 2 つの質点についてそれぞれの位置を x, y とするとき、Newton の万有引力の法則により運動方程式は次の微分方程式系となる：

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{|x-y|^2} \frac{x-y}{|x-y|}, \quad M\ddot{y} = -\frac{GMm}{|x-y|^2} \frac{y-x}{|x-y|} \quad (G \text{ は万有引力定数}).$$

方程式の右辺は 2 つの質点の万有引力相互作用により得られるが、Newton が述べているようにこれは 2 つの質点が「瞬間的」に相互作用をしていることを意味する。

2 「遅れ」と functional differential equations (FDEs)

情報伝達時間は 0 でないことより、一般に離散的相互作用においては「遅れ」が生じる (transmission delay)。また、population dynamics においてたとえば子供から大人への成長にかかる時間によっても「遅れ」が生じる (maturation delay)。ここで、「遅れ」とは未知関数 $x(\cdot)$ の微分係数 $x'(t)$ がその t における履歴 (history) $\{x(s) : s \leq t\}$ に依存することを意味する。このような方程式は遅延微分方程式 (DDE) とよばれる。DDE の数学的定式化が標題の FDE (関数微分方程式) である (Hale & Verduyn Lunel [1])。

遅れが有限 ($0 < r < +\infty$) の場合には、FDE は連続写像のなす Banach 空間 $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ 上の半力学系を定める。この意味で、スカラーの方程式 ($n = 1$) であっても解は複雑な振る舞いを示す。講演では、FDE のダイナミクスの解説と以前に得た結果 ([2])、および今後の展望についてお話しする。

参考文献

- [1] Hale, J. K. & S. M. Verduyn Lunel (1993), Introduction to functional differential equations. Applied Mathematical Sciences **99**. (Springer-Verlag, New York).
- [2] Nishiguchi, J., (*accepted in Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*).

*j-nishi@math.kyoto-u.ac.jp

変分原理による離散勾配法の ピアノシミュレーションへの応用

石川 歩惟* 神戸大学大学院 システム情報学研究科

キーワード：幾何学的力学, 離散力学

概要

解析力学において運動方程式は変分原理から導かれる。また、この原理は力学理論の重要な基盤となっており、例えばエネルギー保存則を始めとする力学の保存則は変分原理と対称性から導かれることが Noether の定理として示されている [1]。

近年、方程式のもつ構造を保った数値計算法が盛んに研究されている。このような数値計算法は構造保存型数値解法と呼ばれており、汎用解法に比べ安定性に優れている場合が多いことが経験的に知られている。我々はこれまでの研究で、ハミルトン常微分方程式に対する変分原理を利用したエネルギー保存数値解法を提案してきた [2]。この手法では時間方向の対称性からエネルギー保存則が導かれるという事実に着目し、この計算過程を離散化後に再現することによって、最終的に次のようなエネルギー保存スキームを導出する：

$$\frac{q^{n+2} - q^n}{2\Delta t} = \bar{\nabla}_p \mathcal{H}(q^{n+1}, q^n, p^{n+1}, p^n), \quad \frac{p^{n+1} - p^{n-1}}{2\Delta t} = -\bar{\nabla}_q \mathcal{H}(q^{n+1}, q^n, p^{n+1}, p^n).$$

ここで、 $\mathcal{H}$ はハミルトニアンを表す。 $\bar{\nabla}_u$ は u 方向の離散勾配と呼ばれるもので、勾配のもつ性質を維持するように作られた離散版の勾配である。この手法は、 $\mathcal{H}(q, p)$ が可分、すなわち $\mathcal{H}(q, p) = T(p) + U(q)$ と記述される場合には陽的であり容易に並列化が可能なスキームが設計できるという実用上の利点と、変分原理を切り口に幅広い応用・解析が可能となるという理論上の利点を有する。

エネルギー保存数値解法は、近年盛んになっている偏微分方程式を用いた楽器の数値モデルに基づくシミュレーション [3] において注目されている。これは、楽器などの音波のシミュレーションでは、数秒程度の音を計算するためにも数千もの波を計算する必要があり、汎用解法ではエネルギーの発散や計算時間の増加が起りやすいためである。本講演では、[2] の手法の偏微分方程式に対する適用例として、弦の振動の減衰効果を含まないピアノのハミルトン系数理モデルに対する陽的エネルギー保存スキームの提案と性能評価を行う。

参考文献

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., translated by K. Vogtmann and A. Weinstein, (Springer-Verlag, 1989).
- [2] A. Ishikawa and T. Yaguchi, to be submitted.
- [3] S. Bilbao, *Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*, (John Wiley and Sons, Chichester, 2009).

*a-ishikawa@stu.kobe-u.ac.jp

ある非線形 Schrödinger 方程式系に現れる ソリトン解の分岐と安定性

山添 祥太郎* 京都大学 情報学研究科

キーワード：偏微分方程式，力学系，分岐解析，安定性解析

概要

次の非線形 Schrödinger 方程式系を考える．

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u + (\alpha|u|^2 + \gamma|v|^2)u &= 0 \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v + (\beta|v|^2 + \gamma|u|^2)v &= 0 \end{aligned} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+1}. \quad (\text{CNLS})$$

ここで u, v は複素数値の未知関数， $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ は定数， $\gamma \in \mathbb{R}$ は分岐パラメータである．(CNLS) は 2 つの波束が相互作用しながら伝播していくような物理系においてしばしば現れる．たとえば，非線形光学において複屈折性をもつ光ファイバー中を伝播する 2 つのパルスの包絡線を記述する方程式として知られている [2]．(CNLS) はソリトン解と呼ばれるあるクラスの解をもつが，その中でも特に次の形の解に注目する．

$$u(t, x) = e^{i\omega_1 t} U(x), \quad v(t, x) = e^{i\omega_2 t} V(x), \quad \omega_1, \omega_2 > 0. \quad (1)$$

一方，力学系の分野では，最近 Blázquez-Sanz and Yagasaki[1] によって双曲型サドルに対するホモクリニック軌道の分岐が起きる条件が詳しく調べられた．彼らの理論を (1) に対して適用することで，ソリトン解の分岐が起こることが示される．講演では，ソリトン解の分岐現象について説明した後，分岐した解の安定性について得られた結果をお話する．

参考文献

- [1] D. Blázquez-Sanz and K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits I: Saddle equilibria, *J. Diff. Eqns.* 253 (2012) 2916-2950.
- [2] C.R.Menyuk Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers, *IEEE J. Quantum Electron* QE-23 (1987) 174-176.

空間列の集中と粗い曲率次元条件

小澤 龍ノ介* 京都大学 理学研究科 数学教室

本講演は鈴木紀彦氏 (東北大学) との共同研究に基づく. $X = (X, d_X, \mu_X)$ が測度距離空間であるとは, (X, d_X) が完備可分距離空間で, μ_X が X 上の Borel 確率測度となるときをいう. 測度集中とは, 測度距離空間の任意の 1-Lipschitz 関数が確率収束の意味で定数関数にどれくらい近いのかを調べる分野である. Gromov はこの測度集中を基にオブザーバブル距離とよばれる二つの測度距離空間の間の距離を導入した. 大雑把に書けば, オブザーバブル距離は二つの測度距離空間の 1-Lipschitz 関数全体の集合の差で定義される. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が測度距離空間 Y にオブザーバブル距離の意味で収束するときに集中するという. オブザーバブル距離の特徴としては, 次元が無限大に発散するが, 極限が有限次元になるような例を許容することである. 例えば体積を正規化した n 次元球面の次元に関する列 $\{S^n\}_{n=1}^\infty$ は $n \rightarrow \infty$ としたときに 1 点測度距離空間 $(\{p\}, \delta_p)$ に集中する.

集合 $\mathcal{P}(X)$ を距離空間 (X, d_X) 上の Borel 確率測度全体の集合とする. 集合 $\mathcal{P}_2(X)$ を $\mathcal{P}_2(X) := \{\mu \in \mathcal{P}(X) \mid \exists x_0 \in X \text{ s.t. } \int_X d_X(x_0, x)^2 d\mu(x) < \infty\}$ と定める. $\mathcal{P}_2(X)$ 上の擬距離 $W_2^{\pm h}$ を次のように定義する.

定義 1 (粗い Wasserstein 距離). (X, d_X) を距離空間, $h \geq 0$, $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(X)$ とする.

$$W_2^{\pm h}(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \left(\int_{X \times X} [(d_X(x, x') \mp h)_+]^2 d\pi(x, x') \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{複合同順})$$

と定める. ここで $\Gamma(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \pi(A \times X) = \mu(A), \pi(X \times B) = \nu(B)\}$ とする. W_2^0 を W_2 とかく.

$\text{Ent}(\cdot | \mu_X) : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ を μ_X に関する相対エントロピーとする. $\text{Ent}(\cdot | \mu_X)$ の $W_2^{\pm h}$ に関する粗さ h の K 凸性で粗い曲率次元条件 $h\text{-CD}(K, \infty)$ を定義する.

定義 2 (粗い曲率次元条件). X を測度距離空間, $h \geq 0$, $K \in \mathbb{R}$ とする. X が $h\text{-CD}(K, \infty)$ をみたすとは, 任意の $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $t \in (0, 1)$ に対して, ある $\nu_t \in \mathcal{P}_2(X)$ が存在して次の (1) と (2) をみたす.

$$(1) \quad W_2(\nu_t, \nu_i) \leq t^{1-i}(1-t)^i W_2(\nu_0, \nu_1) + h + \varepsilon, \quad i = 0, 1,$$

$$(2) \quad \text{Ent}(\nu_t | \nu_X) \leq (1-t)\text{Ent}(\nu_0 | \nu_X) + t\text{Ent}(\nu_1 | \nu_X) - \frac{1}{2} K t(1-t) W_2^{\pm h}(\nu_0, \nu_1)^2 + h + \varepsilon$$

ただし $W_2^{\pm h}$ は $K > 0$ のときは W_2^{+h} , $K < 0$ のときは W_2^{-h} とする. また $0\text{-CD}(K, \infty)$ を $\text{CD}(K, \infty)$ と書く.

完備 Riemann 多様体の Ricci 曲率の下限が K であることと $\text{CD}(K, \infty)$ をみたすことは同値であることが Lott-Villani と Sturm により示されている. 通常の $\text{CD}(K, \infty)$ では X は測地空間 (任意の 2 点が測地線で結べる距離空間) となることから従うが, $h > 0$ の場合には離散的な空間でも許容できることがわかる. 以下は本講演における主定理である.

定理 1. $h \geq 0$, $K \in \mathbb{R}$ とする. $h\text{-CD}(K, \infty)$ をみたす測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が固有な測度距離空間 Y に集中するとする. このとき Y も $h\text{-CD}(K, \infty)$ をみたす.

なお, $h = 0$ の場合には船野-塩谷により示されていることに注意しておく.

RCD 空間上の Brown 運動の収束について

鈴木 康平 *

京都大学 理学研究科 数学教室 D3

キーワード : Brown 運動, Ricci 曲率, Gromov–Hausdorff 収束

概要

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の **Brown 運動** $\mathbb{B}$ が与えられると, 期待値を取ることで, 熱半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が対応し, 熱半群を時間に関して微分して L^2 -内積をとることで, 以下のエネルギー形式 $\mathcal{E}$ が対応する:

$$\mathbb{B} \rightsquigarrow \{T_t\}_{t \geq 0} \rightsquigarrow \mathcal{E}(f) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dx \quad f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

ここで, ∇ は勾配作用素, dx は Lebesgue 測度である. 逆に, 先にエネルギー形式 $\mathcal{E}$ が与えられると, 標準的な関数解析の議論により, 対応する熱半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が構成され, Kolmogorov の拡張定理と連続性定理により, Brown 運動 $\mathbb{B}$ が連続関数の空間 $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ 上の測度として一意的に構成される. この議論において本質は, エネルギー形式 $\mathcal{E}$ を定める **空間と微分作用素と測度の3つ組** $(\mathbb{R}^d, \nabla, dx)$ である. Riemann 多様体 (M, g) 上では, 勾配作用素 ∇_g と Riemann 測度 m_g の三つ組 (M, ∇_g, m_g) から同様にエネルギー形式が定まり, 対応する一意的な拡散過程が構成され, これを **Riemann 多様体上の Brown 運動** と呼ぶ. 近年, 測度距離空間上の解析学の発展により, 距離空間 (X, d) に Borel 測度 m を備えた測度距離空間という一般の枠組みで, 勾配作用素と呼ぶべき作用素 ∇ が定義され (Gigli [3]), 三つ組 (X, ∇, m) に対応するエネルギー形式が考えられるようになった (Ambrosio–Gigli–Savaré [1, 2] も参照せよ):

$$\mathcal{E}(f) := \frac{1}{2} \int_X |\nabla f|^2 dm. \quad (1)$$

例えば, Ricci 曲率が下から一様に抑えられた Riemann 多様体の列の測度付き **Gromov–Hausdorff 極限** に現れる空間は, 一般には滑らかな構造を持たないが, エネルギー形式 (1) に対応する **Brown 運動と呼ぶべき拡散過程** が存在することが知られている.

以上の観点から, Brown 運動とは, (1) のエネルギー形式 $\mathcal{E}$ を通じて, 測度距離空間の **幾何学的情報だけから定まる標準的な拡散過程** であり, Brown 運動の性質は空間の幾何学的な性質を反映していると考えられる. そこで, 以下のような問題を考える:

(Q) 空間の収束 $X_n \rightarrow X$ から, その上の Brown 運動の収束 $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}$ は従うか?

本講演では, “Ricci 曲率が下から一様に抑えられている” **RCD 空間** という枠組みで, (Q) が正しい, という筆者によって得られた最近の結果について解説する.

参考文献

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Invent. Math.* Vol. **195** (2014):289–391.
- [2] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Duke Math. J.* Vol. **163**, No. 7, (2014):1405–1490.
- [3] N. Gigli, Nonsmooth differential geometry, An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below, *preprint available at*: arXiv:1407.0809.

低次元 RCD 空間の分類について

北別府 悠* 京都大学 理学研究科

キーワード：Ricci 曲率，曲率次元条件，最適輸送問題

1 リーマンの曲率次元条件

n 次元リーマン多様体 (M^n, g) 上で Ricci 曲率の条件 $\text{Ric}_M \geq K(n-1)$ を仮定する. このようなリーマン多様体全体で成り立つような幾何学的な性質を研究することを考える. その手法の一つとして, そのような多様体族を考えて Gromov-Hausdorff 収束と呼ばれる収束概念における極限空間の解析をし, 多様体族の持つ性質を抜き出すという非常に有効なものがある. そのようにして得られた距離空間を *Ricci limit 空間* という. したがって Ricci limit 空間について理解することは, Ricci 曲率が下に有界なリーマン多様体について理解するということに他ならない. 一般に Gromov-Hausdorff 収束による極限空間は非常に特異な空間で多様体でさえなことが多い. しかしながら次元が低い場合にはすでに分類定理が知られている (本多, 2013).

以上は与えられたリーマン多様体の列に対して Ricci 曲率の性質を調べようという話であるが, 与えられた距離空間 (X, d) 上に直接 "Ricci 曲率が下から抑えられている" という概念を定義することはできないであろうか? 実はこれは可能で, それがリーマン的曲率次元条件というものである. この概念は距離空間だけでは不十分で, その上の測度 m を合わせた組, 測度距離空間 (X, d, m) に対して定義される.

2 主定理

本研究は Sajjad Lakzian 氏 (Fordham 大学) との共同研究である. Ricci limit 空間はリーマン的曲率次元条件を満たすことが知られている. そこで逆に与えられたリーマン的曲率次元条件を満たす測度距離空間 (X, d, m) は Ricci limit 空間であろうか? この問題は未解決であるが, 特別な場合に解答を得ることができた.

定理 1 (主定理 (K-Lakzian)). (X, d, m) をリーマン的曲率次元条件を満たす測度距離空間とする. もし一次元正則集合 $\mathcal{R}_1$ が空集合でないとすれば, (X, d) は $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[0, l]$ あるいは $S^1(r)$ に等長である, ここで $l, r > 0$ とし, $S^1(r)$ は半径 $r > 0$ の円周を表すことにする. さらに測度 m は一次元 Hausdorff 測度と同値な測度で, Radon-Nikodym 微分は曲率次元条件から定まるある種の凸性を持つ.

ここで正則集合とはその点における接錐が一次元のユークリッド空間と等長になるようなものを集めてきたものとする. 以上より, 一次元の場合には Ricci limit 空間とリーマン的曲率次元条件を満たす測度距離空間のクラスは一致していることがわかる.

時間遅れを伴う造血幹細胞動態モデル

濱田 実樹* 奈良女子大学 人間文化研究科

キーワード：遅延微分方程式, 造血幹細胞動態モデル

発表概要

造血幹細胞は血液の細胞成分である赤血球や白血球のもととなる幹細胞で主に骨髄に存在している。造血幹細胞は自己を複製する能力と自身を頂点として多種類の細胞へ段階的に分化する能力をもち、自身の恒常性を保つことによって全身の免疫系の構成を支える役割を担っている。この造血幹細胞の動態を表したモデルが1978年、Mackeyにより考案された[1]。時間遅れの項をもち、この遅れの効果によってさまざまな解を得る。このモデルを用いたシミュレーション結果が臨床データをよく表していることも示されている[2]。

造血幹細胞の動態については未だに未解明な点が多いが、最近では造血幹細胞のみであると考えられてきた自己複製能力を造血幹細胞の分化先である前駆細胞ももちうるということがわかってきた[3]。このことから、造血幹細胞の動態を表すモデルをカスケード的に連結させたときに得られる解の振る舞いを捉えることで造血幹細胞動態の理解へアプローチできるのではないかと考えた。しかし Mackey のモデルに含まれている非線形項は複雑であり取り扱いが難しい。そこで本発表では以下のような異なる二つの時間遅れをもつ Logistic 方程式をカスケード的に連結させた系の解析結果を紹介する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= r_1 \left(1 - \frac{x_1(t - \tau_1)}{K_1}\right) x_1(t) - dx_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= r_2 \left(1 - \frac{x_2(t - \tau_2)}{K_2}\right) x_2(t) + dx_1(t)\end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. C. Mackey, "A unified hypothesis of the origin of aplastic anemia and periodic hematopoiesis." *Blood*, **51.5** (1978): 941.
- [2] Colijn Caroline, and M. C. Mackey. "A mathematical model of hematopoiesis—I. Periodic chronic myelogenous leukemia." *Journal of Theoretical Biology*, **237.2** (2005): 117-132.
- [3] Ryo Yamamoto, et al. "Clonal analysis unveils self-renewing lineage-restricted progenitors generated directly from hematopoietic stem cells." *Cell*, **154.5** (2013): 1112-1126.

結合振動子系でカオスを発生させる 結合ネットワークのサンプリング

寺田 裕* 京都大学大学院 情報学研究科

キーワード：非線形動力学, 位相振動子系, Monte Carlo 法

1. 位相振動子系のカオス

個別の素子が自発的にリズムを持ち、それらが相互作用し合っているような系は自然界において広く見られる。これらを数理モデルとして記述する際には、多くの場合リミットサイクルの構造を持つことがある。このようなリミットサイクルを持つ高次元力学系は位相縮約によって1自由度の位相振動子系へと縮約される [1].

一方、少数自由度の位相振動子系が相互作用することによってカオスが発生することが報告されている [2]. しかし、どのようなタイプの結合によってカオスが発生するのかはわかっていない。そこで、本研究では、Markov 連鎖 Monte Carlo 法を用いることで、相互作用をした位相振動子系でカオスを発生させるような結合ネットワークのサンプリングを行い、その性質を調べた。

2. Markov 連鎖 Monte Carlo 法を用いた結合ネットワークの探索

Markov 連鎖 Monte Carlo 法は、統計物理において物理量の期待値や基底状態などを求めるために用いられている [3]. 本研究では、結合ネットワークに対し最大 Lyapunov 指数を求め、その最大 Lyapunov 指数の関数をエネルギーとみなすような定式化を行った。その結果、最大 Lyapunov 指数をできるだけ大きくするような結合ネットワークのサンプリングを行うことができた。そして、これらの結合ネットワークにおけるカオスの性質を数値計算により詳しく調べた。これにより、カオスを生み出す結合ネットワークの性質が明らかになった。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence*, (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [2] Y. L. Maistrenko, O. V. Popovych, and P. A. Tass, *Internat. J. Bifur. Chaos*, **15** (2005), no. 11, 3457-3466.
- [3] D. P. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* 4th edn, (Cambridge University Press, Cambridge, 2015).

1次元定常輸送方程式の解の正則性解析

川越 大輔* 京都大学大学院 情報学研究科

キーワード：解析学, 微分積分方程式, 逆問題解析, 解の滑らかさ

1 問題設定

Ω を开区間 $(0, 1)$, S^1 を単位円とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} I(x, \xi) - (\mu_a(x) + \mu_s(x)) I(x, \xi) + \mu_s(x) \int_{S^1} p(x, \xi \cdot \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi') \in \Omega \times S^1. \quad (1)$$

ただし, θ は $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$ を満たす $(-\pi, \pi]$ の元であり, 以下この関係により S^1 と $(-\pi, \pi]$ を同一視する. また, $\cdot$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の Euclid 内積, $d\sigma$ は S^1 上の線素とする. ここで, μ_a および μ_s は Ω 上の非負値関数であり, p はすべての $x \in \Omega$ に対して θ についての連続関数であることを仮定する. 本講演では, 方程式 (1) を定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には通常, 次の境界条件が課される. まず, 境界 Γ_- を次のように定義する:

$$\Gamma_- := \{(0, \xi) | 0 < \theta < \pi\} \cup \{(1, \xi) | -\pi < \theta < 0\}.$$

そして, I_- を Γ_- 上の関数として, 次の境界条件を課す:

$$I(x, \xi) = I_-(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (2)$$

最後に, 定常輸送方程式の境界値問題の解を次のように定義する. $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ を $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の有界連続関数全体の集合とする. $I \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1)-(2) の解であるという.

- $x \in [0, 1), 0 < \theta < \pi$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp \left(- \int_0^x \frac{\mu_a(\tau) + \mu_s(\tau)}{\sin \theta} d\tau \right) I_-(0, \xi) + \int_0^x \frac{\mu_s(t)}{\sin \theta} \exp \left(- \int_t^x \frac{\mu_a(\tau) + \mu_s(\tau)}{\sin \theta} d\tau \right) \int_{S^1} p(t, \xi \cdot \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x \in (0, 1], -\pi < \theta < 0$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp \left(\int_x^1 \frac{\mu_a(\tau) + \mu_s(\tau)}{\sin \theta} d\tau \right) I_-(1, \xi) - \int_x^1 \frac{\mu_s(t)}{\sin \theta} \exp \left(- \int_t^x \frac{\mu_a(\tau) + \mu_s(\tau)}{\sin \theta} d\tau \right) \int_{S^1} p(t, \xi \cdot \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

本講演では, この解の存在と一意性, さらに係数や境界値の滑らかさと解の滑らかさとの関係について述べる.

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

ホモロジーによる画像解析

川口 澄恵* 京都大学 理学研究科

キーワード：方体集合のホモロジー

目的

画像がどのような位相的性質(連結成分の個数や穴の個数)をもったものなのかを知りたいとき、複雑な画像は人の目では捉えられない。そこで、計算機を用いて解析することを考える。このとき重要となるのがホモロジーである。ホモロジーは、代数的に計算でき、位相的性質(H_0 の betti 数は連結成分の個数, H_1 の betti 数は穴の個数)を表している。画像を input したときにその画像のホモロジーを計算するアルゴリズムを理解し、実際に使いたい。

結果

画像はピクセルに色を付けて表されている。そこで、方体集合のホモロジーを計算することに意味がある。ここで方体集合 (cubical set) とは、基本方体 (elementary cube) と呼ばれる、端点が整数の閉区間の直積からなる集合の有限和である。方体集合 X のホモロジー $H = \{H_k(X)\}$ を計算するために、方体鎖複体 (cubical chain complex) $C = \{C_k(X), \partial_k\}$ を定義する。 $\partial \circ \partial = 0$ が計算によりわかる ([1]) ので、 $Z_k(X) := \ker \partial_k$, $B_k(X) := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ とすれば、 B_k は Z_k の部分群であり、商群 $H_k(X) := Z_k/B_k$ を考えられることがわかる。

$H_k(X)$ を計算するためには、まずすべての整数 l で $C_l(X)$ の基底を固定した上で、 Z_k および B_k の基底を表す行列を求め、次に商群 $H_k(X)$ を表す行列を求めればよい。この手順で実際にアルゴリズムを組むことができ、商群 $H_k(X)$ を表す行列を求めるときに用いるのがスミス標準形である。

このアルゴリズムを実装したのが CHomP([3]) である。CHomP には様々なプログラムが入っているが、本講演では chomp というプログラムを紹介する。具体的には、二次元画像を input すれば、 H_0, H_1 の betti 数を出力することを見る。その他のプログラムに関しては、参考文献 [2],[3] を参照されたい。

参考文献

- [1] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, Computational Homology, Springer-Verlag New York (2004)
- [2] 平岡裕章 CHomP ソフトウェア入門 応用数学サマーセミナー 2007
- [3] Computational Homology Project, <http://chomp.rutgers.edu>.

*sumie-k@math.kyoto-u.ac.jp

Poincaré-Bendixson の定理の高次元系への拡張

後藤 貴宏* 京都大学大学院 情報学研究科 M1

キーワード：連続時間力学系, 周期軌道

Poincaré-Bendixson の定理

次のような微分方程式の定める $\mathbb{R}^n$ 上の n 次元力学系を考える.

$$\dot{x} = f(x)$$

ただし, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続的微分可能であるとする. このような系に周期軌道が存在することを示すのは難しい問題であることが多いものの, 周期軌道が存在するための十分条件を与える定理はいくつか知られている [1]. Poincaré-Bendixson の定理はそのような定理のうちの一つである. 大雑把に言えば, この定理は $\mathbb{R}^2$ 上の系において有界な正の半軌道の ω -極限集合は不動点を含まなければ周期軌道であるということを主張するものである [2].

Smith による拡張

Poincaré-Bendixson の定理は Jordan の曲線定理に依存しており [2], 3 次元以上の系に対しては一般には成立しない [1]. しかし, 適切な前提条件を追加することによって高次元の系に対しても成立する定理に拡張することができる. 本講演では R. A. Smith による Poincaré-Bendixson の定理の高次元の系への拡張の結果 [3] を紹介し, 余裕があれば関連する話題についてもお話しする予定である.

参考文献

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, (Westview press, 2000), pp. 196-210.
- [2] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, (Wiley-Interscience, 1969), pp. 51-54.
- [3] R. A. Smith, *Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **85** (1980), pp. 153-172.

ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の大域挙動の分類

山野 祥英* 京都大学 理学研究科

キーワード：非線形シュレディンガー方程式，散乱理論，爆発，ソリトン

1 導入

非線形分散型方程式の解の典型的な時空挙動としては散乱，爆発，ソリトンがあり，ソリトンには安定なものと不安定なものがある．こういった解の挙動を与えられた初期値から予測，分類することが目標である．本講演では以下のポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式を考える．

$$i\partial_t u - \Delta u + Vu = |u|^2 u, \quad u(t, x) : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\text{NLS})$$

ここでポテンシャル $V(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ について， $H := -\Delta + V$ が単独の負の固有値を持つ場合，(NLS) はポテンシャル由来の小さな安定ソリトンと，非線形項由来の大きな不安定ソリトンを持ち，特に質量 (L^2 ノルム) 十分小の球対称解に制限すればそれぞれを基底状態と第一励起状態として特徴付けられる．この第一励起状態より小さいエネルギー領域における解の分類について次の定理を紹介する．以下 $V(x)$ は上を満たす“良い”球対称関数とする．

2 主定理

(NLS) は質量 $M(u) = \int \frac{|u|^2}{2} dx$ およびエネルギー $E(u) = \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + V|u|^2) dx - \frac{1}{4} \int |u|^4 dx$ という保存量を持つ．基底状態の集合を $\mathcal{S}_0$ ，第一励起状態に対応するエネルギーを $\mathcal{E}_1(M(u))$ とおき，空間 $\mathcal{H}(\mu) := \{\varphi \in H^1 \mid \varphi : \text{球対称}, M(\varphi) \leq \mu, E(\varphi) < \mathcal{E}_1(M(\varphi))\}$ での (NLS) の初期値問題を考える．

定理 1 ([1]). ある十分小さい $\mu_* > 0$ が存在し，任意の初期値 $u(0, x) \in \mathcal{H}(\mu_*)$ に対応する (NLS) の解は時間両方向に有限時間爆発するか，基底状態に散乱する．

ここに解が時間正 (負) の方向に基底状態に散乱するとは，ある $\Phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_0$ と $u_{\pm} \in H^1$ が存在し，以下を満たすことである．

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - \Phi(t) - e^{-it\Delta} u_{\pm}\|_{H^1} = 0.$$

講演ではこの解の分類が初期値から決定される ([1]) ことについても述べる．

参考文献

- [1] K. Nakanishi, Global dynamics below excited solitons for the nonlinear Schrödinger equation with a potential, preprint, arXiv:1504.06532.

Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation の紹介

大垣 元紀* 京都大学 理学研究科

キーワード：偏微分方程式

講演内容について

nonlinear Schrödinger equation の初期値問題 (以下 IVP)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (1)$$

の適切性を $d = 2, 3$ の場合に考える.

既に分かっている結果として, $d = 2, 3$ のとき, それぞれ $s > 0$, $s > 1/2$ で locally well-posed であり, 解の存在時間は初期値の Sobolev norm のみに依存する.

更に, L^2 -保存則

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad (2)$$

と, $s \geq 1$ の場合, 次のエネルギー保存則

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u(t)\|_{L^4}^4 = E(u_0) \quad (3)$$

が成り立つ. 従って $s \geq 1$ ならば即座に globally well-posed が従う.

一方で $s < 1$ の場合にはエネルギー保存則は意味を成さず, これだけでは解の大域存在はわからない. しかし, (IVP) の解であるという性質上, ある種の”弱い”保存則が成り立つと期待される. これを正当化したものが”I-method”であり, 論文中ではこれを”almost conservation law”と称している.

目標とする結果は次である.

定理 1. $d = 2$, $s > 4/7$ において (IVP) は globally well-posed.

定理 2. $d = 3$, $s > 5/6$ において (IVP) は globally well-posed.

参考文献

- [1] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao. *Almost conservation laws and global rough solutions for nonlinear Schrödinger equation* Math Res Lett **9**, (2002) 5-6, 659-682.

N体シュレーディンガー作用素の2つのクラスターを含むチャンネルに対する伝播評価

蘆田 聡平* 京都大学 理学研究科

キーワード：シュレーディンガー方程式、多体問題、散乱理論

N体のシュレーディンガー作用素は次のように書かれる。

$$\tilde{H} = -\sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j), \quad x_i \in \mathbb{R}^3$$

ここで x_i は i 番目の粒子の座標である。 V_{ij} は i 番目と j 番目の粒子の相互作用を表すポテンシャルである。 $\tilde{H}$ から質量中心の運動エネルギーを除いた作用素を H とする。次にクラスター分解とは $\{1, \dots, N\}$ の部分集合の族 $a = \{C_1, \dots, C_m\}$, $C_i \subset \{1, \dots, N\}$ で次の条件を満たすものである。

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^m C_i = \{1, \dots, N\}$$

クラスター分解 a に対して $X := \{x \in \mathbb{R}^{3N} \mid \sum_{i=1}^N x_i = 0\}$ の部分空間 X^a を $X^a := \{x \in X \mid \forall C_i \in a, \sum_{j \in C_i} x_j = 0\}$ と定める。 $\mathbb{R}^{3N}$ から X へ誘導される計量による X^a の直行補空間を X_a と書く。 x の X^a , X_a への射影をそれぞれ x^a , x_a とする。 ∇ に対して X^a , X_a の相対空間での射影により、それぞれ ∇^a , ∇_a を定義する。 Δ^a , Δ_a も同様に定義される。 $\exists C_k \in a, i, j \in C_k$ を $(ij) < a$ と書く。 H^a , H_a をそれぞれ次のように定義する。

$$H^a := -\Delta^a + \sum_{(ij) < a} V_{ij}(x_i - x_j), \quad H_a = -\Delta_a + H^a$$

次を仮定する。 $V_{ij}(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ であり、 $\exists \rho > \frac{1}{2}$, $\partial_y^\alpha V_{ij}(y) = \mathcal{O}(|y|^{-|\alpha|-\rho})$, $|y| \rightarrow \infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^3$. λ_α を H^a の固有値として、対応する射影を π_α とする。クラスター分解 a に含まれるクラスターの数を $\#a$ と書く。私は Skibsted[1] の方法を用いて次の結果を示した。

定理 1. $E, \epsilon > 0$, $\#a = 2$ とし、 λ_α は離散固有値とする。そのとき、台が E の十分近くにある $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ と $\rho > s' > s > 0$ を満たす s, s' に対して、

$$\chi\left(\frac{x_a^2}{4t^2} - (E - \lambda_\alpha) < -\epsilon\right) \pi_\alpha e^{-itH} f(H) \langle x \rangle^{-s'} = \mathcal{O}(t^{-s}), \quad t \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{L}(L^2(X))$$

が成り立つ。ここで $\chi(\frac{x_a^2}{4t^2} - (E - \lambda_\alpha) < -\epsilon)$ は $\{x_a \mid \frac{x_a^2}{4t^2} - (E - \lambda_\alpha) < -\epsilon\}$ の特性関数である。

また、この結果を用いて N 体シュレーディンガー方程式の散乱行列を構成することを考えている。

参考文献

- [1] Skibsted, E, Propagation estimates for N-body Schroedinger Operators *Commun. Math. Phys.* **142** (1991), 67-98.

*ashida@math.kyoto-u.ac.jp

Dirac のデルタ関数をポテンシャルに持つ 非線形シュレディンガー方程式の解の分類

成亥 隆恭* 京都大学 理学研究科

1 導入

本講演は、京都大学学振 PD の池田正弘氏との共同研究に基づく。本講演では次の Dirac のデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式について考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u + \gamma\delta_0(x)u + |u|^{p-1}u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで $\gamma < 0$, $p > 5$ とする。 δ_0 は原点に質量を持つ Dirac のデルタ関数とする。 u は複素数値の未知関数とし、 u_0 はソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R})$ に属する与えられた関数とする。この初期値問題 (1.1) は H^1 で局所適切であり、更にエネルギー $E_\gamma(u) := \frac{1}{4}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2}|u(0)|^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ と質量 $M(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2$ が保存することが知られている。そこで本講演では解の大域挙動について考える。主結果を述べるために記号を導入する。 $\omega > 0$ とし、 $S_{\omega,\gamma}(u) := E_\gamma(u) + \omega M(u)$ とする。また $P_\gamma(\phi) := \frac{1}{2}\|\partial_x \phi\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2}|\phi(0)|^2 - \frac{p-1}{2(p+1)}\|\phi\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ と定める。この汎関数 P_γ は Virial 等式に現れ、シュレディンガー方程式の解析において重要な役割を果たす。次の2つの最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} n_\omega &:= \inf\{S_{\omega,\gamma}(\phi) : \phi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, P_\gamma(\phi) = 0\}, \\ r_\omega &:= \inf\{S_{\omega,\gamma}(\phi) : \phi \in H_{rad}^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, P_\gamma(\phi) = 0\}, \end{aligned}$$

ここで、 $H_{rad}^1(\mathbb{R})$ は $H^1(\mathbb{R})$ に属する球対称 (偶関数) な関数全体の集合とする。

$\gamma < 0$ のとき、 $n_\omega < r_\omega$ であることに注意する。

2 主結果

本講演では、次の2つの結果を紹介する。

定理 2.1 (non-radial case). 初期値 u_0 が $S_\omega(u_0) < n_\omega$ を満たすとする。このとき、以下が成り立つ。

- (1). $P_\gamma(u_0) \geq 0$ ならば、解 u は散乱する。
- (2). $P_\gamma(u_0) < 0$ ならば、解 u は有限時間か無限時間で爆発する。

定理 2.2 (radial case). 初期値 u_0 が球対称 (偶関数) で、更に $S_\omega(u_0) < r_\omega$ を満たすとする。このとき、以下が成り立つ。

- (1). $P_\gamma(u_0) \geq 0$ ならば、解 u は散乱する。
- (2). $P_\gamma(u_0) < 0$ ならば、解 u は有限時間か無限時間で爆発する。

参考文献

- [1] Akahori, Nawa, Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 3, 629–672.
- [2] Banica, Visciglia, preprint, arXiv:1504.02640v1.
- [3] Fukuizumi, Jeanjean, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 121–136.
- [4] Fang, Xie, Cazenave, Sci. China Math. **54** (2011), no. 10, 2037–2062.

*e-mail: inui@math.kyoto-u.ac.jp 本研究は特別研究員奨励費 201502570 の助成を受けたものである。

非切断 Boltzmann 方程式の Chemin-Lerner 空間における大域解

坂本 祥太* 京都大学大学院 人間・環境学研究科

キーワード：偏微分方程式、Boltzmann 方程式、解の存在と一意性

本講演では、Boltzmann 方程式の Cauchy 問題の解の存在と一意性について論じる。Boltzmann 方程式は希薄気体における粒子の分布関数の時間発展を表す方程式で、運動論における基礎方程式の一つである。この方程式の解の存在と一意性に関して、近年 Alexandre-Morimoto-Ukai-Xu-Yang (AMUXY) [1] [2] が全空間において、Gressman-Strain [4] がトラス上においてそれぞれ独立に、定常解周りで重みつき Sobolev 空間内に微小な初期条件のもとで時間大域解をもつことを証明した。一方、Duan-Liu-Xu (DLX) [3] は物理的条件を限定するような強い仮定の下ではあるが、時間-速度-空間混合型の Besov 空間（導入者により、Chemin-Lerner 空間と呼ばれる）において、定常解周りの小さな初期条件に対する大域的弱解を構成した。この空間は、先行研究における重みつき Sobolev 空間よりも広いものである。従って、この「強い仮定」を外すことを目標に研究を開始した。方程式そのものに対する仮定としては AMUXY と同じものを採用し、物理的に重要なモデルが十分含まれる場合において、DLX と同じエネルギークラス内に大域的弱解を構成することができた。この結果を紹介することがこの発表の目標である。発表においては、この「強い仮定」を具体的に解説し、その有無によってどのように困難が表れるか、またそれを解決するためにどのように AMUXY の結果を用いたか、Besov 空間と Chemin-Lerner 空間の扱いの違いは何か、などに重点を置いて解説する予定である。本講演の内容は、京都大学大学院人間・環境学研究科の森本芳則教授との共同研究に基づく。

参考文献

- [1] Alexandre, R., Morimoto, Y., Ukai, S., Xu, C.-J. and Yang, T., *Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff*, Commun. Math. Phys. **304** (2011), 513-581.
- [2] Alexandre, R., Morimoto, Y., Ukai, S., Xu, C.-J. and Yang, T., *The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I. Global existence for soft potential*, J. Funct. Anal., **262** (2012), 915-1010.
- [3] Duan, R.-J., Liu, S.-Q. and Xu, J., *Global well-posedness in spatially critical Besov space for the Boltzmann equation*, 2013, available at <http://arxiv.org/abs/1310.2727>.
- [4] Gressman, P.-T. and Strain, R.-M., *Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 3, 771-847.

*sakamoto.shota.76r@st.kyoto-u.ac.jp

定常渦斑の数値計算法とその数値検証に向けた展望

宇田 智紀* 京都大学 数学教室

キーワード：(定常) Euler 方程式, 渦斑, 楕円型自由境界問題, 数値計算

概要

2次元 Euler 方程式の解として, 一定渦度領域をもつ**渦斑**が知られ, 渦力学におけるもっとも基本的な解の一つとして活発に研究が行われている. 定常渦斑問題は渦斑境界を未知とする楕円型の自由境界問題であり, 特別な場合を除き, 解の存在などに関する数学的な結果は知られていない. 一方で数値計算を主とした多くの先行研究 (例えば [1]) が, 解の 1-パラメータ族の存在を示唆している. 本研究の目的は, 定常渦斑の存在を計算機援用証明することであり, 講演ではその過程で導出された数値計算手法と数値例を紹介する.

渦斑を扱う上で重要な鍵となるのが**等高線力学**である. 等高線力学は, 渦斑境界の時間発展を記述する力学系である. 以下では簡単のため, 2次元 Euclid 空間を $\mathbb{C}$ と同一視して実軸対称な Euler 流を考え, 上半 (resp. 下半) 平面に渦度の強さ ω (resp. $-\omega$) の渦斑 D (resp. $\bar{D}$) があるとする. このとき, 等高線力学は次の微分積分方程式で与えられる.

$$\frac{dz}{dt} = v(z; \partial D_t) := \frac{\omega}{4\pi} \oint_{\partial D_t} \log(z - w) d\bar{w} - \frac{\omega}{4\pi} \oint_{-\partial \bar{D}_t} \log(z - w) d\bar{w}. \quad (\spadesuit)$$

ここで, $z(s, t)$ ($0 \leq s \leq 2\pi$) は時刻 t における渦斑境界 ∂D_t のパラメータ表示であり, $v(z; \partial D_t)$ は渦斑 D_t が誘導する速度場である. 定常渦斑は等高線力学 ($\spadesuit$) の (相対的) 平衡状態に対応し, したがって定常渦斑の自由境界問題は以下の零点問題とみなせる.

$$\mathcal{F}(\partial D) := [v(z; \partial D) - V_T] \cdot n(z; \partial D) = 0 \quad \text{on } \partial D. \quad (\diamond)$$

ここで V_T は渦斑の平行移動速度を表す実パラメータ, $n(z; \partial D)$ は境界 ∂D 上の外向き単位法ベクトル, $a \cdot b$ は Euclid 内積を表す. 先行研究 [2] では, まず等高線力学を離散化した有限次元系を得て, $\mathcal{F}(\partial D)$ の離散版の写像を微分することで数値計算スキーム (Newton 法) を得ている. 一方, 本研究では, $\mathcal{F}(\partial D)$ を直接微分することにより, 離散化によらないスキームを得た. Fourier 級数で離散化した場合の数値計算結果を図 1 に示す. それぞれの閉曲線が, 2次元定常 Euler 方程式の解に対応している.

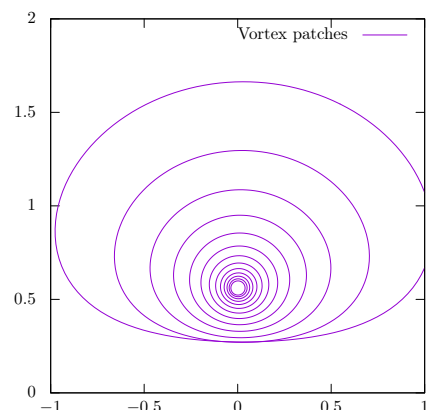


図 1: 渦斑族; 渦度 $\omega = 50$ で固定, パラメータ V_T は 0.3 (内) から 14 (外)

参考文献

- [1] R. T. Pierrehumbert, *J. Fluid Mech.*, **99** (1980), 129–144.
- [2] A. R. Elcrat, B. Fornberg and K. G. Millter, *J. Fluid Mech.*, **544** (2005), 53–68.

TN 行列の逆固有値問題と離散可積分系

赤岩 香苗* 京都大学 情報学研究科

キーワード：逆固有値問題, 離散可積分系, totally nonnegative 行列

概要

逆固有値問題の重要な話題の 1 つに, 指定した固有値をもつ行列を構成する問題がある. この問題は一般に非適切な問題であり, 難易度は構成する行列の形や性質に大きく依存する [2]. すべての小行列式が非負である行列を *totally nonnegative (TN)* 行列と呼ぶ. TN 行列の「すべての小行列式が非負」という制約の厳しさのため, TN 行列の逆固有値問題は解法は知られていなかった.

具体的な解の表記をもつ非線形力学系は可積分系と呼ばれる. 可積分系にうまく離散化を施したものを離散可積分系という. 離散可積分系の解は行列式を使って記述できるのが大きな特徴である. 代表的な離散可積分系の 1 つに離散戸田方程式

$$q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}, \quad q_k^{(n+1)} e_k^{(n+1)} = q_{k+1}^{(n)} e_k^{(n)} \quad (1)$$

がある. 離散戸田方程式 (1) は, 数値解析分野で著名な 3 重対角行列の固有値を求めるための商差 (qd) 法の漸化式と一致することが知られている. 離散戸田方程式 (1) と商差法の関係の解明をきっかけとして, 様々な離散可積分系から高精度な行列の固有値計算法が定式化されている. 特に, 離散戸田方程式 (1) のある種の拡張である離散ハングリー戸田方程式からは, Hessenberg 型の TN 行列に対する固有値計算法が提案されている [3].

本研究では, 離散可積分系と固有値計算法の関係に着目し, TN 行列の逆固有値問題に対して離散可積分系を利用することを考える. [1] では, 離散ハングリー戸田方程式に基づき, 指定した固有値をもつ Hessenberg 型の TN 行列の構成方法を提案している. 本講演では, 離散ハングリー戸田方程式をさらに拡張することで, Hessenberg 型だけではなく任意の帯幅をもつ TN 行列の構成が可能になることを示す.

参考文献

- [1] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi and K. Kondo, *Numer. Algor.*, **70** (2015), 469–488.
- [2] M. T. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, (Oxford University Press, New York, 2005).
- [3] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki and Y. Nakamura, *Annal. Mat. Pura Appl.*, **192** (2013), 423–445.

*akaiwa@amp.i.kyoto-u.ac.jp

液滴の曲率と Topological Singularities

古賀 一基* 京都大学 情報学研究科

キーワード：自由境界面問題，表面張力，微分積分方程式

概要

完全な球形から変形を受けた液滴は、その歪みの様子と表面張力の強さの組み合わせに応じて豊かなダイナミクスを示すことが多くの実験・数値計算結果から知られている。特に近年では、Euler 方程式系から導かれる境界積分方程式 (BIE) の一つである Birkhoff-Rott 方程式系に表面張力の効果を加えることにより、液滴の振る舞いに関して従来よりも効率的な数値解析的研究がなされてきた [1][2]。また、数学解析の視点から見れば、2 次元問題の数値解析的困難を解決した [3][4] の手法から影響を受けて、3 次元問題について [5] により一定のクラスの初期条件に対する局所適切性が示された。しかし、[1][2] の数値計算結果が示すように、一般の初期条件に対してこの問題の大域適切性を示すことはできないと考えられている。これは、表面張力の存在する系においては自由境界面が有限時間で自己交差に向かうような初期条件が存在し、その結果、解の爆発現象 ([3] に従い、この有限時間特異点を topological singularity と呼ぶ) が生じることによる。そこで、数値解析において次に重要になるのは、考える初期値問題に現れる有限時間特異点の分類と、各種特異点と初期条件の間にある対応関係を明らかにすることである。

本研究では、表面張力のあるコンパクトな軸対称渦層を液滴のモデルとして採用し、いくつかの初期形状と表面張力係数に対して静止状態からの振る舞いを数値的に調べ、その結果を上述の特異点と関連付けて議論する。

参考文献

- [1] Q. Nie, *J. Comp. Phys.*, **174** (2001), 438-459.
- [2] M. Nitsche and P.H. Steen, *J. Comp. Phys.*, **200** (2004), 299-324.
- [3] T. Hou, J. Lowengrub and M. Shelly, *J. Comp. Phys.*, **114** (1994), 312-338.
- [4] T. Hou, J. Lowengrub and M. Shelly, *Phys. Fluids*, **9** (7) (1997), 1933-1954.
- [5] D.M. Ambrose and N. Masmoudi, *Commun. Math. Sci.*, **5** (2007), 391-430.

マルコフ切替を持つ拡散過程の漸近安定性

鳥生 梓* 京都大学大学院 理学研究科

講演概要

$w(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))^T$ を m 次元ブラウン運動とする. $r(t)$, $t \geq 0$ を有限状態空間 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ に値をとる連続時間マルコフ連鎖で, $\Delta \downarrow 0$ のとき

$$P(r(t + \Delta) = j \mid r(t) = i) = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & (i \neq j) \\ 1 - \gamma_i\Delta + o(\Delta) & (i = j) \end{cases}$$

を満たすものとする. ここで $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ は生成行列と呼ばれ, $i \neq j$ ならば, $\gamma_{ij} \geq 0$ であり, $\gamma_i = -\gamma_{ii} = \sum_{j:j \neq i} \gamma_{ij} \geq 0$ である. さらに, マルコフ連鎖 $r(\cdot)$ はブラウン運動 $w(\cdot)$ と独立であると仮定する.

関数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ および $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ について, 次の確率微分方程式を考える.

$$dx(t) = f(x(t), t, r(t))dt + g(x(t), t, r(t))dw(t) \quad (1)$$

ただし, 初期値は $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ である. この確率微分方程式の解によって定まる $\mathbb{R}^n$ 上の確率過程 $x(t)$ を, マルコフ切替を持つ拡散過程と呼ぶ.

本講演では, [1] に従って, 正則M行列の理論を用いて, (1) の解が漸近安定になるためのいくつかの十分条件を紹介する. また, $r(t)$ の動きに従って解が漸近安定な確率微分方程式から解が漸近不安定な確率微分方程式へスイッチングするにも関わらず, 結果として全体の動きは漸近安定になる例を紹介する.

参考文献

- [1] X. Mao, Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Stochastic Process. Appl., 79 (1999), 45-67.
- [2] X. Mao, C. Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperial College Press, 2006.

*azusa@math.kyoto-u.ac.jp

準安定性と界面モデル

中島 秀太* 理学研究科

キーワード：統計力学、準安定、界面

概要

統計力学モデルの時間発展では、時間が経つにつれ巨視的な変化が小さくなり、最終的に平衡状態に達する。その際、モデルが平衡状態に達するまでの時間を考える非平衡状態の問題は重要な問題であるが、解析は困難な場合が多い。その中で、非平衡状態に属する準安定状態では興味深い現象が起こる。準安定状態とは局所的に安定な状態であり、典型的には平衡状態に到達するまでの時間が非常に長く、さらに指数分布に従うという特徴を持つ。統計力学モデルでは、エネルギーと安定性に逆相関の関係があり、時間発展において、より低いエネルギー状態に向かう傾向がある。そのため、準安定状態はエネルギーの極小値と理解される場合もある。この時、平衡状態はエネルギーの最小値に対応するため、安定状態とも呼ばれる。下の図 1-(1) のようにエネルギーが一つの谷である場合は、準安定状態は存在せず短い時間で安定状態に到達する。一方、エネルギーが複数の谷をもつ図 1-(2) のようなモデルでは、エネルギー障壁 (図 1-(2) の h) による妨げを受け、到達時間は図 1-(1) と比べて非常に長くなる。

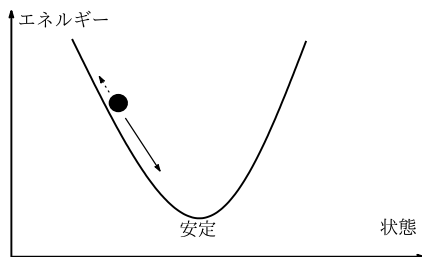


図 1-(1):one well

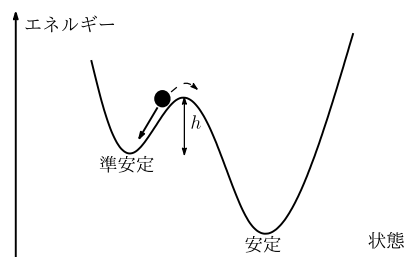


図 1-(2):two well

本講演では、準安定性の興味深いモデルの一つである界面吸着モデルを紹介する。

参考文献

- [1] J. Beltran, C. Landim: A Martingale approach to metastability. *Probability Theory and Related Fields*, Volume 161, Issue 1-2, pp 267-307, 2015.

ホモ/ヘテロクリニック軌道近傍における一般的な力学系の可積分性の判定

山中 祥五* 京都大学 情報学研究科 数理工学専攻 M1

キーワード：可積分性の判定、Morales-Ramis 理論、微分ガロア理論

背景

n 自由度ハミルトン系が完全可積分であるとは、互いにポアソン可換な n 個の保存量が存在することをいう。完全可積分性を調べる手法としては、変分方程式のモノドロミー行列を調べる Ziglin 解析 [3] と変分方程式の微分ガロア群を調べる Morales-Ramis 理論 [2] がよく知られている。一方、一般的な微分方程式に対しては、ハミルトン系の場合を一般化した、次の可積分の定義が提案されている。

定義 1. n 連立微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ が可積分であるとは、 p 個のベクトル場 $X_1 (= f)$, $X_2, \dots, X_p$ と q 個の関数 $h_1, \dots, h_q$ が存在し、以下が成り立つことをいう。

- (1) $p + q = n$, かつ、ベクトル場が一次独立、かつ、 $dh_1, \dots, dh_q$ が一次独立。
- (2) ベクトル場は可換。つまり、 $[X_i, X_j] = 0$ 。
- (3) 関数はベクトル場の保存量。つまり、 $X_i(h_j) = 0$ 。

Morales-Ramis 理論による可積分性の判定は、この一般化な可積分の定義に対しても適用できることが Ayoul と Zung[1] によって示された。これは微分ガロア理論に基づくものであるが、モノドロミー行列による以下の判定方法が得られた。

主結果

定理 1. $n (\geq 3)$ 次元の連立微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ において、 $n - 2$ 次元不変多様体上のヘテロクリニック軌道 $\hat{x}$ が存在し、それがつなぐ二つの固定点 $p_{\pm}$ におけるヤコビ行列 $Df(p_{\pm})$ のある 3 つの固有値 $\lambda_{\pm}, \mu_{\pm}, \nu_{\pm}$ に対して $(\mu_{\pm} - \nu_{\pm})/\lambda_{\pm} \notin \mathbb{Q}$ が成り立つとする。このとき、微分方程式が一般的な意味で可積分なら、変分方程式 $\dot{\xi} = Df(\hat{x}(t))\xi$ において、点 $p_{\pm}$ に対応する二つの特異点におけるモノドロミー行列は同時三角化可能。

参考文献

- [1] M. Ayoul and N. T. Zung, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348** (2010), 1323-1326.
- [2] J. J. Morales-Ruiz and J. P. Ramis, *Methods Appl. Anal.* **8** (2001), 33-96.
- [3] S. L. Ziglin, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982) 181-189.

*s.yamanaka@amp.i.kyoto-u.ac.jp

On the Gradient-Hamiltonian Decomposition and Existence of Limit Cycles

Tomoharu Suda*

Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

Keywords : Gradient-Hamiltonian decomposition, Helmholtz-Hodge decomposition, limit cycle

Introduction

Gradient and Hamiltonian vector fields are well-studied and the behavior of solution curves for corresponding differential equations can be completely determined in planar systems. Although Poincaré-Bendixon theorem constrains possible forms of invariant sets for planar flows, in general, it is extremely difficult to predict global behavior of an individual vector field. In particular, the existence of limit cycles is of interest because the general condition for it is unclear.

Using Helmholtz-Hodge decomposition, some vector fields can be represented as a sum of gradient and hamiltonian vector fields. Demongeot et al. [1] have proposed an application of this decomposition to the numerical analysis of limit cycles and proved the existence of such decomposition for polynomial vector fields. Thus, as is true for various studies of Helmholtz-Hodge decomposition[2], numerical applications have preceded mathematical ones.

Here I propose mathematical applications of gradient-Hamiltonian (GH) decomposition. First, we establish the existence of GH decomposition for analytic vector fields. Then I show a condition for GH decomposition to fully work and apply it to limit cycle problems.

Main Theorems

Thm 1 (Existence of GH decomposition). *Let $\mathbf{F} = (f(x, y), g(x, y))$ be an analytic vector field on $\mathbb{R}^2$. Then, there exist two analytic functions $V, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\mathbf{F} = -(V_x, V_y) + (H_y, -H_x)$.*

Def 1 (Hamilton-likeness). *A GH decomposition is Hamilton-like if $\nabla V(X_0) \cdot \mathbf{F}(X_0) = 0$ for all $X_0 \in \mathbb{R}^2$ with the condition $\nabla H(X_0) \cdot \mathbf{F}(X_0) = 0$.*

Thm 2. *Consider a Hamilton-like GH decomposition. Let Γ be a compact connected component of a contour of $H(x, y)$ such that $\nabla H(X_0) \cdot \mathbf{F}(X_0) = 0$ for all $X_0 \in \Gamma$. Then, Γ is an invariant set for the flow. In particular, if Γ contains no equilibrium, then Γ is a closed orbit.*

Further assume that ∇V and $(H_y, -H_x)$ are orthogonal on the whole plane. If Γ as above is a closed orbit and the Hessian of V has a negative eigenvalue on Γ , then Γ is a limit cycle.

References

- [1] Jacques Demongeot, Nicolas Glade, and Loic Forest, *Liénard systems and potential-hamiltonian decomposition i methodology*, *Comptes Rendus Mathematique*, Vol. 344, **2** (2007), 121-126.
- [2] Harsh Bhatia, Gregory Norgard, Valerio Pascucci, and Peer-Timo Bremer, *The helmholtz-hodge decomposition—a survey*, *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, Vol.19, **8** (2013), 1386-1404.

*suda.tomoharu.88s@st.kyoto-u.ac.jp

特異渦の解析を通じたエンストロフィー散逸現象の メカニズムの理解

後藤田 剛* 京都大学 理学研究科

キーワード：数理流体力学, 特異渦

二次元乱流を特徴づける性質として, 高レイノルズ数におけるエネルギー密度スペクトル中のエンストロフィーカスケードとエネルギー逆カスケードに対応する領域の出現が挙げられる [3]. ここで, エンストロフィーとは渦度の L^2 ノルムで定義される量である. 言い換えれば, 二次元において乱流状態を維持するには粘性ゼロ極限において流体のエネルギーは保存し, エンストロフィーは特異散逸することが重要である. 従って, 非粘性流体の運動を記述する二次元 Euler 方程式のエンストロフィー散逸解が二次元乱流を数学的に解析する上で重要であると考えられる. しかし, 二次元 Euler 方程式については可解性が知られているような関数空間では解のエンストロフィー特異散逸が起こり得ないことが数学的に示されている [1]. つまり, このような散逸的弱解を二次元 Euler 方程式から直接構成するのは数学的に難しい. そこで, Euler 方程式の分散型正則化方程式である Euler- α 方程式を考える. この方程式は二次元では初期渦度が Radon 測度空間という, 二次元 Euler 方程式では可解性が知られていないような正則性の弱い初期値に対しても時間大域的な可解性を持つ [4]. よって, 二次元 Euler- α 方程式の大域的弱解を考え, α ゼロ極限でエンストロフィーを特異散逸するような解の構成を試みる [2, 5]. 実際に [5] では, Euler- α 方程式において初期渦度を Delta 関数として導かれる α 点渦系の 3 体問題について, このような散逸的弱解を数値計算を用いて具体的に構成している. 本研究では同じく α 点渦系の 3 体問題について, どのような条件下で解が α ゼロ極限でエンストロフィーを散逸するのかを数学的に明らかにし, その極限解が点渦系の 3 体問題における自己相似衝突解となっていることを証明した.

参考文献

- [1] Eyink, G. L.: Dissipation in turbulent solutions of 2D Euler equations. *Nonlinearity*, **14**, 787-802 (2001)
- [2] Gotoda, T. and Sakajo, T.: Enstrophy variations in the incompressible 2D Euler flows and α point vortex system. *Proc. Int. Conf. Math. Fluid Dyn.* (2015)
- [3] Kraichnan, R. H.: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423 (1967)
- [4] Oliver, M. and Shkoller, S.: The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid. *Comm. Part. Diff. Equ.*, **26**, 295-314 (2001)
- [5] Sakajo, T.: Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse. *J. Fluid Mech.*, **702**, 188-214 (2012)

*gotoda@math.kyoto-u.ac.jp

対称な木の上を動くランダムウォークの局所時間

阿部 圭宏* 京都大学 理学研究科 D3

キーワード：ランダムウォーク, 局所時間

グラフ上の (連続時間) 単純ランダムウォークとは各ステップで現在いる点で期待値 1 の指数分布に従う時間だけ待機した後, その隣接する点達の中から 1 つを等確率で選び, その点に移動する確率モデルである. 局所時間とは与えられた時刻まで単純ランダムウォークを走らせたときに, ウォークが各点でどの程度の長さ滞在するかを示す量である. 本講演ではグラフとして有限な 2 分木を考え, 各「葉」の局所時間に着目する. (「葉」とは隣り合う点の数が 1 個のみの点, あるいは下に向かって大きくなるように有限な 2 分木を描いたときに最も下に位置する点達). 特に 2 分木を大きくしていくとき, 葉全体での局所時間の最大値分布がどのような極限分布に収束するかを紹介する. より詳しく述べるとその極限分布は「分枝ランダムウォーク」という別のモデルから定まる “derivative martingale” と呼ばれるもので特徴付けられることを紹介する.

独立同分布な確率変数列の最大値分布は古くに研究されており, 一般にその極限分布は 3 つのクラスに分類されることが知られている. 上記の局所時間は独立な確率変数ではないため, この理論を適用することができない. 実際, 上記の局所時間の最大値の極限分布は古典的に知られている 3 つのクラスとは別の新しいクラスに属することがわかった. 最大値の極限分布がこの新しいクラスに属するモデルは他にも多く知られており, その代表格は「分枝 Brown 運動」というモデルである.

分枝 Brown 運動の最大値分布は KPP 方程式という, ある偏微分方程式の解であることが知られており, そのため古くからその最大値分布は盛んに研究されてきた [1]. 最近, 分枝 Brown 運動の最大値分布の研究で開発された手法が他の様々なモデルに対して応用可能であることが発見され, 上記の局所時間の最大値分布の解析においてもその手法を用いている. その手法は最大値分布の解析を Brown 運動がある曲線を超えない確率の評価に落とす議論であり, 後者は基本的に反射原理と呼ばれるものを使うことで計算可能である.

本講演では上記の局所時間の最大値分布に関する結果の詳細を紹介したい. 時間が許せば, その証明の概略も述べたい.

参考文献

- [1] M. Bramson. Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves. *Mem. Amer. Math. Soc.* **44** (1983), no. 285, iv+190 pp.

ヒルベルト幾何と粗幾何学

嶺山 良介* 大阪大学 理学研究科

キーワード：ヒルベルト幾何学，粗幾何学，粗ノビコフ予想

X を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の空でない有界凸領域とする．このとき X 上の異なる二点 x, y を通る直線は X の境界 ∂X と二点 a, b で交わる．いま a, x, y, b が直線上にこの順に並んでいると仮定したとき，

$$d(x, y) = \begin{cases} \log \frac{\|a-y\| \|b-x\|}{\|a-x\| \|b-y\|} & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{if } x = y, \end{cases}$$

は X 上の距離となる．これを X 上のヒルベルト距離といい，凸領域 X とその上のヒルベルト距離 d の組をヒルベルト幾何学と呼ぶ．双曲空間のクラインモデルはヒルベルト幾何学の典型的な例である．ヒルベルト幾何学においてはその境界 ∂X （または領域）の形が内部の幾何学的性質に大きく影響する．例えば ∂X が C^2 級の滑らかさを持つならばグロモフの意味で双曲的な空間である．また，閉包 $\bar{X}$ が $\mathbb{R}^n$ 上の凸多面体であるならばユークリッド空間と擬等長同型である．

凸領域が狭義凸であるとはその境界が線分を含まないときをいう．本講演では狭義凸なヒルベルト幾何学についてその境界が粗幾何学的な意味で「良い」境界であることを述べる．このような境界はコロナと呼ばれる．

定理 1. $X \subset \mathbb{R}^n$ をヒルベルト距離を備えた凸領域とする．このとき境界 ∂X がヒルベルト幾何学 (X, d) のコロナである必要十分条件は X が狭義凸であることである．

X の閉包 $\bar{X}$ が可縮であることから，定理の系として次が分かる．

系 2. $X \subset \mathbb{R}^n$ をヒルベルト距離を備えた狭義凸領域とする．このとき， X に対して粗ノビコフ予想が成立する．

粗ノビコフ予想は指数定理の一般化である．具体的には K ホモロジーと Roe 環の K 群の間の準同型（粗組み立て写像）が単射であることを主張する命題で，粗幾何学における中心的な問題として知られている．前述したようにヒルベルト幾何学はその境界の形によって双曲的な空間にもユークリッド空間と擬等長同型にもなるが，このような場合には既に予想の成立が知られている．しかしヒルベルト幾何学がグロモフの意味で双曲的になるには境界の滑らかさが少なくとも C^1 級でなければならず，ユークリッド空間と擬等長同型になるには $\bar{X}$ が凸多面体であることが必要である．したがって領域が狭義凸であるという条件はこれらよりも真に広いクラスのヒルベルト幾何学に対する主張であり，よく知られた非正曲率性を持たない幾何学的空間で粗ノビコフ予想が成り立つ初めての例になっている．

参考文献

- [1] R. MINEYAMA AND S. OGUNI, *Coarse geometry of the Hilbert metric*, arXiv:1412.5828.

*r-mineyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp