第 6 回白浜研究集会

プログラム＆アブストラクト

2014 年 12 月 2 日(火)〜4 日(木)
紀州・白浜温泉　旅館むさし

12 月 2 日(火)		12 月 3 日(水)		12 月 4 日(木)	
		9:30~10:00	蘆田聡平	10:00~10:30	新里智行
		10:10~10:40	西口純矢	10:40~11:10	川越大輔
		Tea time (20 分)			
		11:00~11:30	宇田智紀		
		11:40~12:10	坂本祥太		
		Lunch (1 時間 40 分)			
		13:50~14:20	赤岩香苗		
14:30~15:00	山崎陽平	14:30~15:00	新庄雅斗		
15:10~15:40	中野雄史	Tea time (30 分)			
Tea time (30 分)		15:30~16:00	内免大輔		
16:10~16:40	寺田裕	16:10~16:25	後藤田剛		
16:50~17:20	成亥隆恭	16:30~16:45	山添祥太郎		
17:25~17:40	佐野めぐみ	16:50~17:05	湯本英二		

プログラム

12 月 2 日（火）

14:30 – 15:00　山崎陽平 (京都大 理学研究科 D3)
ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の横方向不安定性

15:10 – 15:40　中野雄史 (京都大 人間・環境学研究科 D4)
Exponential Decay of Quenched Correlations of Partially Expanding Maps on the Torus

Tea time （30 分）

16:10 – 16:40　寺田裕 (京都大 情報学研究科 D1)
自然振動数分布が異なる複数の位相振動子集団のダイナミクスと Ott-Antonsen ansatz による縮約

16:50 – 17:20　戌亥隆恭 (京都大 理学研究科 D1)
絶対値べき乗型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式について

17:25 – 17:40　佐野めぐみ (大阪市立大 理学研究科 M2)
Effect of the distance between singular points in the heat equation with a singular potential

12 月 3 日（水）

09:30 – 10:00　薗田聡平 (京都大 理学研究科 M2)
定磁場中の原子の Born-Oppenheimer 近似

10:10 – 10:40　西口純矢 (京都大 理学研究科 D1)
遅延フィードバック制御による定常解の安定化：特性方程式の解析

Tea time（20 分）

11:00 – 11:30　宇田智紀 (京都大 理学研究科 D1)
非適合要素による楕円型境界値問題の数値検証法

11:40 – 12:10　坂本祥太 (京都大 人間・環境学研究科 D1)
拡散項付きボルツマン方程式の無限エネルギー解

Lunch（1 時間 40 分）

13:40 – 14:20　赤岩香苗 (京都大 情報学研究科 D2)
離散ハングリー戸田方程式に関連づく Totally Nonnegative 行列の逆固有値問題について

14:30 – 15:00　新庄雅斗 (京都大 情報学研究科 M2)
離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の行列式解の漸近解析

Tea time（30 分）

15:30 – 16:00　内免大輔 (東京工業大 理工学研究科 / 大阪市立大 数学研究所 PD)
Dirichlet 積分量を持つ非線型楕円型方程式について

16:10 – 16:25　後藤田剛 (京都大 理学研究科 D1)
Euler-α 方程式の数学解析と Euler 方程式との関係性

16:30 – 16:45　山添祥太郎 (京都大 情報学研究科 D1)
非線形シュレディンガー方程式の基底状態の漸近安定性のための十分条件について

16:50 – 17:05　湯本英二 (数理解析研究所 M2)
Navier-Stokes 方程式の厳密解について

12 月 4 日（木）

10:00 – 10:30　新里智行 (大阪大 理学研究科 D3)
Asymptotics for the reduced Ostrovsky equation

10:40 – 11:10　川越大輔 (京都大 情報学研究科 M2)
Analysis for Solving Stationary Transport Equations Numerically

ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の横方向不安定性

山崎 陽平* 京都大学 理学研究科 数学教室

1 概要

以下のポテンシャル付きの非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$(\mathrm{NLS})_{\mathrm{X}} \qquad iu_t = -\Delta u + Vu - |u|^{p-1}u, \quad u : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{C}.$$

ここで, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ かつ $X = \mathbb{R}$ または $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$. ただし, $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$. さらに, ポテンシャル V について以下の条件を課す.

(V1) ある $C > 0$ と $\alpha > 0$ が存在して $|V(x)| \le Ce^{-\alpha|x|}$ を満たす.

(V2) $-\partial_x^2 + V$ は最小固有値 $-\lambda_* < 0$ を持つ.

方程式 $(\mathrm{NLS})_X$ は任意の初期値 $u_0 \in H^1(X)$ に対して時間局所的な一意解を持つことが [1, 6] により示されている. 方程式 $(\mathrm{NLS})_X$ は定在波と呼ばれる変数分離型の周期解 $e^{i\omega t}\varphi$ を持つ. 定在波は安定であるときに周期解として観測されると考えられており, 定在波の安定性を調べることは重要である. ここで, 定在波の安定性は次で定義される.

定義 1. 定在波 $e^{i\omega t}\varphi$ が安定であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $\|u_0 - \varphi\|_{H^1(X)} < \delta$ を満たす任意の初期値 $u_0 \in H^1(X)$ に対して解 $u(t)$ が時間大域的に存在して

$$\begin{cases} \sup_{t\ge0}\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \left\|u(t) - e^{i\theta}\varphi\right\|_{H^1(X)} < \varepsilon, & \text{if } X = \mathbb{R}, \\ \sup_{t\ge0}\inf_{\theta\in\mathbb{R},y\in\mathbb{T}_L} \left\|u(t,\cdot,\cdot) - e^{i\theta}\varphi(\cdot,\cdot-y)\right\|_{H^1(X)} < \varepsilon, & \text{if } X = \mathbb{R}\times\mathbb{T}_L. \end{cases}$$

また, 定在波 $e^{i\omega t}\varphi$ が安定でないとき不安定であるという.

関数 ψ_* を $-\partial_x^2 + V$ の $-\lambda_*$ に対応する固有関数で $\|\psi_*\|_{L^2} = 1$ かつ $\psi_* > 0$ を満たすものとする. $X = \mathbb{R}$ のとき, Rose と Weinstein [3] により, 振動数 ω が $0 < \omega - \lambda_* \ll 1$ に対して, 方程式の線形部分である $-\partial_x^2 + V$ の固有関数 ψ_* から分岐する安定な定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ が存在することが示されている. この安定な 1 次元の定在波を $e^{i\omega t}\tilde{\varphi}_\omega(x,y) = e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$ とみなすことで $(\mathrm{NLS})_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L}$ の定在波とみなし, $e^{i\omega t}\tilde{\varphi}_\omega$ の安定性を考える. 定在波 $e^{i\omega t}\tilde{\varphi}_\omega$ はその形状から線状定在波と呼ばれる. このとき, 定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は安定であっても, 2 次元的な摂動を考慮した線状定在波 $e^{i\omega t}\tilde{\varphi}_\omega$ は不安定になることがある. この現象を横方向不安定性といい, $V = 0$ のときの非線形シュレディンガー方程式や KP 方程式の横方向不安定性は [2, 4, 5, 7] によって研究されている.

本講演では $(\mathrm{NLS})_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L}$ の線状定在波 $e^{i\omega t}\tilde{\varphi}_\omega$ の安定性について紹介する.

参考文献

[1] J. Ginibre and G. Velo, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1-32.

[2] T. Mizumachi and N. Tzvetkov, Math. Ann. **352** (2012), no. 3, 659–690.

[3] H. A. Rose and M. I. Weinstein, Physica D **30** (1988), 207–218.

[4] F. Rousset and N. Tzvetkov, Ann. I. Poincaré-AN **26** (2009) 477–496.

[5] F. Rousset and N. Tzvetkov, Comm. Math. Phys., **313** (2012), no. 1, 155–173.

[6] H. Takaoka and N. Tzvetkov, J. Funct. Anal. **182** (2001) 427–442.

[7] Y. Yamazaki, appear to Kodai Math. J.

*y-youhei@math.kyoto-u.ac.jp

Exponential Decay of Quenched Correlations of Partially Expanding Maps on the Torus

中野　雄史*　　京都大学人間・環境学研究科

本講演では二次元トーラス $\mathbb{T}^2$（$= \mathbb{S} \times \mathbb{S}$, $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$）上の写像

$$f : (x, s) \mapsto (E(x), s + \tau(x) \bmod 1) \tag{0.1}$$

による離散力学系 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ を考える．（ここで，時刻 $n \geq 1$ に対して f^n は f の n 回合成であり，f^0 は $\mathbb{T}^2$ 上の恒等写像と考える．）ただし，$\tau : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ と $E : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ は $\mathcal{C}^\infty$ 級とし，E を拡大写像（つまり，定数 $\lambda > 1$ が存在して，$\max_{x\in\mathbb{S}} \frac{d}{dx}E(x) \geq \lambda$）とする．このとき，$f$ はベース方向については拡大的となるが，ファイバー方向 $s \mapsto s + \tau(x) \bmod 1$ については拡大性を持たない．このような写像は部分拡大写像と呼ばれ，また最も簡単な非自明な部分拡大写像が f となっている．

エルゴード理論における重要な視点の 1 つとして,「与えられた力学系について，その相関関数は減衰するか？」,「減衰する場合，その減衰速度はどのぐらいか？」という問題がある．μ を $\mathbb{T}^2$ 上の f-不変な確率測度（つまり $\mu(f^{-1}B) = \mu(B)$ が任意の Borel 集合 $B \subset \mathbb{T}^2$ について成り立つ）とするとき，$\mathbb{T}^2$ 上の滑らかな複素数値関数 ϕ, ψ について，その（作業的）相関関数 $\mathrm{Cor}^{\mathrm{op}}_{\phi,\psi}(n)$ は

$$\mathrm{Cor}^{\mathrm{op}}_{\phi,\psi}(n) = \int \phi \circ f^n \cdot \bar{\psi} dxds - \int \phi d\mu \int \bar{\psi} dxds. \tag{0.2}$$

と定義される．この相関関数が減衰するとき，それは任意の事象 $\phi \circ f^n$, ψ が漸近的に独立になるということであり，力学系が十分に複雑であることを意味する．また，その減衰速度が指数関数的になるほどに十分速ければ,（それは力学系が十分に複雑であることを意味するため）エルゴード性や中心極限定理などの極限定理が成り立つことが期待される（[1]）．

では，どのような力学系について相関関数が（指数的に）減衰する／しないのであろうか？力学系が拡大写像であるときは，その拡大性から $\phi \circ f^n$ の台がよく ”混ざり合う ” ため，その相関関数が指数的に減衰することが古くから知られていた（[5] など）．これらの証明が 40 年以上前から存在するのに対して，部分拡大写像（より一般には部分双曲力学系）や双曲的な流れなど，力学系が拡大的（ないし双曲的）でない方向を持つ場合の相関関数の減衰の結果については，Dolgopyat の 1998 年の結果 [2] まで待つ必要があった．というのも，簡単な計算により分かることだが，力学系 f が平衡移動 $f : s \mapsto s + \alpha \bmod 1$（$\alpha$ は実数）のように全く拡大性を持たない場合は事象 $\phi \circ f^n$ の台は時刻がどれほど経過しても ψ の台と ”混じり合わない ” ので相関関数が減衰することはない．そのため，ファイバー方向がほぼこの形となっている我々の部分拡大写像 f についても，非拡大方向（= ファイバー方向）の ”ねじれ ” を発生させる関数 τ が十分なずれを生み出さなければ相関関数の減衰は望むことができない．この τ に関する条件は，Dolgopyat の論文で非可積分性条件として与えられ，さらにこれは辻井 [6] によって**横断性条件**と呼ばれる幾何的な条件に言い換えられた．

辻井の与えた横断性条件は通有的なものであり，この条件のもとでは相関関数は指数的に減衰するが，一方で相関関数が指数的に減衰しないような τ も ”多く ” 存在していることが知られている（[6, Theorem 1.4]）．そこで自然と考えられる問題が,「τ がランダムに選ばれたとき，相関関数は（指数的に）減衰するか？」という問題である．我々は，摂動

*nakano.yushi.88m@st.kyoto-u.ac.jp

前の写像が横断性条件を満たせば，任意の急冷型摂動に対して相関関数は指数的に減衰するという結果を得た（J.Wittsten 氏との共同研究，[4]）．

講演では，なるべく技術的・抽象的な定義などは避け，具体的な例を通して背景や主結果の説明を行うことを目標とする．その中で最も技術的に重要となるのは，転移作用素と呼ばれる作用素のスペクトル解析への相関関数の指数的減衰の問題の帰着と，部分捕縛性と呼ばれる辻井の横断性条件の準古典解析的な言い換え（[3]）である．

参考文献

[1] Bonatti, Christian, Lorenzo J. Díaz, and Marcelo Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity.* Berlin: Springer, 2005.

[2] Dolgopyat, Dmitry. "On decay of correlations in Anosov flows." *Annals of mathematics* (1998): 357-390.

[3] Faure, Frédéric. "Semiclassical origin of the spectral gap for transfer operators of a partially expanding map." *Nonlinearity* **24.5** (2011): 1473.

[4] Nakano, Yushi, and Jens Wittsten. "On the spectra of a randomly perturbed partially expanding map on the torus." *arXiv preprint arXiv:1404.0147* (2014).

[5] Sinai, Yakov G. "Gibbs measures in ergodic theory." *Russian Mathematical Surveys* **27.4** (1972): 21.

[6] Tsujii, Masato. "Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps." *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **28.01** (2008): 291-317.

自然振動数分布が異なる複数の位相振動子集団のダイナミクスとOtt-Antonsen ansatzによる縮約

寺田　裕*　　京都大学大学院 情報学研究科

1　異なる自然振動数分布を持つ位相振動子集団

脳波，心筋といった生物における現象から，電力網などの工学的な問題に至るまで，多くの場面において，リズムを持つ複数の素子が結合し，機能を果たす現象が知られている．このような系の理論的解析として，位相振動子系は重要な役割を果たす [1]．しかし一方で，位相振動子系の研究において未解決な問題も多い．例として，複数位相振動子集団において，同期状態と非同期状態が共存するキメラ状態が現れるといった興味深い現象が報告されている [2]．しかし先行研究では，集団間で同じ振動数分布を仮定しているので，現実の系と必ずしも対応しているとは言えない．そこで，複数の振動子集団が異なる自然振動数分布を持つ場合を考える．この系のダイナミクスを理論解析と数値計算により，詳細に調べた．その際には，次節で述べる Ott-Antonsen ansatz を用いた．

2　Ott-Antonsen ansatzによる縮約

最近の位相振動子系の理論的研究の目覚ましい発展として Ott と Antonsen による縮約が挙げられる [3]．Ott-Antonsen ansatz は，位相分布密度関数の型を制限することで，連続極限における振動子系の集団のダイナミクスを少数自由度の常微分方程式へと縮約する．適用の結果得られた少数自由度系を調べることで，系の集団的ふるまいに関して知ることができる．Ott-Antonsen ansatz により，蔵本モデルの大域的安定性を示す厳密解が得られている．しかし一方で，ansatz の適用は限定的であり，適用範囲は完全にはわかっていない．本研究では，Ott-Antonsen ansatz を拡張し，自然振動数分布が異なる複数位相振動子集団に適用した．その結果，集団のダイナミクスを表す 3 自由度の常微分方程式を得た．縮約後の少数自由度系を詳しく調べることで，系の性質を得た．また，ansatz の適用の際には新たに仮定をおいたので，数値計算により仮定の妥当性の検証を行った．

謝辞

共同研究者である京都大学大学院情報学研究科青柳富誌生准教授にはこの場を借りて感謝を述べたいと思います.

参考文献

[1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, (Springer-Verlag, Berlin, 1984).

[2] D. M. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, and D. A. Wiley, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 084103 (2008).

[3] E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos*, **18**, 037113, (2008).

*y-terada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

絶対値べき乗型非線形項を持つ 非線形シュレディンガー方程式について

成亥　隆恭*　　京都大学 理学研究科　数学教室　D1

1　導入

本研究は, 池田正弘氏（京都大学 学振 PD）との共同研究である. 本講演では, 以下の絶対値べき乗型の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^p, & (t,x) \in [0, T(\lambda)) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \lambda f(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで, $u = u(t,x) : [0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は未知関数で, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする. また $p > 1$ とし, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ する. λ は正のパラメータで初期値の大きさを表し, $f = f(x)$ は与えられた複素数値関数で初期値の形状を表す. この方程式 (NLS) は $1 < p \leq 1 + 4/d$ の場合, 時間局所解が一意に存在することが知られている ([3] e.t.c.). 本研究の目的は, (NLS) において有限時間で爆発する解があるか否か, またその解の最大存在時間 $T(\lambda)$ の上からの評価を導くことである. $\lambda > 0$ が小さい場合においては, 有限時間で爆発する解が存在し, その解の最大存在時間 $T(\lambda)$ が

$$T(\lambda) \leq C\lambda^{-1/\kappa}$$

を満たす（ただし $C, \kappa > 0,$ は λ に依らない定数）ことが池田-成亥 [1] によって示された. そこで今回は特に λ が大きい場合を考える. ここでは簡単のため $\mu = 1$ の場合のみを扱う.

2　主結果

定理 1 (池田-成亥 [2]). *$1 < p \leq 1 + 4/d$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. u を $[0, T(\lambda))$ 上の (NLS) の解とする. 更に $k < d/2 (\leq 2/(p-1))$ とし, 初期形状 f が次の評価を満たすと仮定する.*

$$-\Im f(x) \geq \begin{cases} |x|^{-k}, & (|x| \leq 1), \\ 0, & (|x| > 1), \end{cases} \tag{1}$$

このとき, ある $\lambda_0 > 0$ と定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $\lambda > \lambda_0$ に対して,

$$T(\lambda) \leq C\lambda^{-1/\kappa}, \tag{2}$$

が成り立つ. ここで $\kappa := 1/(p-1) - k/2$ である.

証明にはテスト関数の手法を用いる. 時間があれば「$p > 1 + 4/d$ の場合, 時間局所的な弱解が存在しない」ことについても説明する.

参考文献

[1] M. Ikeda, T. Inui, *Small data blow-up of L^2 or H^1-solution for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance.* preprint. (submitted)

[2] M. Ikeda, T. Inui, *Some non-existence results for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance*, preprint. (submitted).

[3] Y. Tsutsumi, Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.

*inui@math.kyoto-u.ac.jp

Effect of the distance between singular points in the heat equation with a singular potential

佐野 めぐみ* 大阪市立大学 理学研究科 前期博士課程 2 年

1 研究の背景と導入

$N \geq 3, \Omega \in \mathbb{R}^N$ を有界領域, $a, b \in \Omega$, $C \in \mathbb{R}$ をパラメータ, $u_0 \geq 0, u_0 \in L^2(\Omega)$ とし, 以下のような特異ポテンシャルを持つ熱方程式を考察する.

$$(P)_{a,b} \begin{cases} u_t - \Delta u = C\dfrac{u}{|x-a|\,|x-b|} & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 \ \text{ on } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

$a = b = O$(原点) の場合の方程式 $(P)_{O,O}$ については, 閾値 $C_* = \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ が存在し, $C \leq C_*$ のときは（任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して）時間大域弱解が存在し, $C > C_*$ のときには瞬間完全爆発することが知られている ([1]). この閾値 C_* は, Hardy の不等式の最良定数 $\left(\text{i.e. } C_* = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \dfrac{||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}}{\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx}\right)$ に起因している. 我々は [1] の一般化として, 特異性が 2 点 $a, b \in \Omega$ にある場合の熱方程式 $(P)_{a,b}$ に関して, $C(a,b,\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \dfrac{||\nabla u||_2^2}{\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x-a||x-b|} dx}$ の値を下から評価することと, [2] の結果を使用することにより, $(P)_{a,b}$ の時間大域弱解が存在する C の範囲について考察する.

2 主定理

定理 1. *$C(a,b,\Omega) \geq \max\{C_*, \frac{\sqrt{\lambda_1(\Omega)}\ |a-b|}{2}\sqrt{C_*}\}$ が成立し, $C \leq C(a,b,\Omega)$ のとき, $(P)_{a,b}$ は（任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して）時間大域弱解をもつ. 特に特異点 a と b との距離が $|a-b| > \frac{(N-2)L}{\sqrt{N}\pi}$ の場合には, $C(a,b,\Omega) > C_*$ が成立する. (ただし $\lambda_1(\Omega)$ は領域 Ω 上での Dirichlet Laplacian の第一固有値であり, $L > 0$ を $\sup_{x,y \in \Omega} |x-y| < \sqrt{N}L$ を満たす数とする).*

参考文献

[1] P.Baras and J.A.Goldstein, *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 121-139.

[2] X.Cabré and Y.Martel, *Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potential singulier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), 973-978.

*m13saM0311@st.osaka-cu.ac.jp

定磁場中の原子のBorn-Oppenheimer近似

蘆田　聡平*　　京都大学 理学研究科

電子と原子核からなる多体系を考えるとき、電子と原子核の質量比が小さいことから、原子核より電子のほうが速く動くので、原子核の固定された配置に対して電子は固有関数の状態になっていると考えられる。Born-Oppenheimer 近似とは、電子と原子核の質量比を 0 に近づけるときの Schrödinger 方程式の解の漸近的な挙動を調べることである。

Sordoni と Martinez は電子と原子核の質量比を h^2、原子核の座標を x、電子の固有関数への正射影を $\Pi_0(x)$ とすると、ある正射影 $\Pi = \Pi_0 + \sum_{j\geq 1} \Pi_j h^j$ で系全体のハミルトニアン P との交換子 $[\Pi, P]$ がエネルギーの範囲を制限すると $O(h^\infty)$ のオーダーとなるようようなものを構成した。この正射影を用いると、初期値 φ_0 のエネルギーが制限された範囲に入っているとき、

$$e^{-itP/h}\varphi = e^{-itP_1/h}\Pi\varphi_0 + e^{-itP_2/h}(1-\Pi)\varphi_0 + O(|t|h^\infty\|\varphi_0\|)$$

$$P_1 = \Pi P \Pi,\ P_2 = (1-\Pi)P(1-\Pi)$$

が成り立つ。さらに $\mathrm{Ran}\Pi_0(x) = k$ とすると、ユニタリー作用素 $U : \mathrm{Ran}\Pi \to (L^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus k}$ と、原子核の座標だけに作用する擬微分作用素の行列 A が存在して、

$$e^{-itP_1/h}\Pi = U^* e^{-itA/h} U \Pi$$

が成り立つ。ここで A の主表象は $\Pi_0(x)$ の固有値を $\lambda(x)$、I を単位行列として、$(\xi^2 + \lambda(x))I$ である。このことからさらに、電子の固有関数と原子核の coherent state を初期値に持つ波束の $h \to 0$ での漸近展開が得られる。

定磁場がある場合には、電子が原子核の周りで固有関数になっていることから、原子核の運動への磁場の影響を打ち消すことが予想されるが、このことは質量中心と、電子の原子核に対する相対的な座標に座標変換することで明らかになる。この座標系で、Sordoni の方法で Π を構成しようとすると、ハミルトニアン P のレゾルベントを擬微分作用素の級数で表すときに、表象の中に電子の座標 y のべきが現れて有界な作用素にならない。しかし、Π_j を構成する段階で、表象を電子のハミルトニアンの固有値の周りで積分するので、表象の中に Π_0 を作り出すことができ、固有関数の指数減衰を使って Π_j の表象は有界になる。また Π_j にエネルギー P の cutoff function をかけると有界になることも示さなければならないが、これもまた、P のレゾルベントを擬微分作用素で表すことで Calderón-Vaillancourt の定理により示される。このようにして構成された A の形から原子核が磁場中でも直進することがわかる。

参考文献

[1] V. Sordoni, Reduction scheme for semeclassical operator-valued Schrödinger type equation and application to scattering. *Commun. Partial Differ. Equations.*, **28** (2003), 1221-1236.

[2] M. Martinez, V. Sordoni, Twisted pseudodifferential calculus and application to the quantum evolution of molecules. *Memoirs of the AMS*, **936** (2009)

*ashida@math.kyoto-u.ac.jp

遅延フィードバック制御による定常解の安定化：特性方程式の解析*

西口 純矢† 京都大学大学院理学研究科 数学教室 D1

1 導入：遅延フィードバック制御

遅延フィードバック制御 (delayed feedback control) の目的は，遅延を用いたフィードバック項を元の微分方程式系に加えることにより，そのあるカオスアトラクタに埋め込まれた 1 つの不安定周期軌道を安定化することである．これにより，その周期軌道近傍のダイナミクスは考えている周期軌道に吸引されるという意味で自明なものとなる．一般に，カオスアトラクタには無限個の不安定周期軌道が稠密に埋め込まれている．これらのいくつかの不安定周期軌道を微小摂動で安定化させることをカオス制御とよび，遅延フィードバック制御は Pyragas [1] により提案されたカオス制御の 1 つの手法である．

$\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな ODE $\dot{x} = f(x)$ とその軌道不安定な周期解 $\gamma(t)$ (周期を $T > 0$ とする) に対して，微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(x(t-\tau) - x(t)) \tag{DFC}$$

を考える．ここで，K は $n \times n$ の実行列，$\tau = mT$ (m は正の整数) である．このとき，「(DFC) の周期解として $\gamma(t)$ が軌道安定になるような K と τ が存在するか？」ということが問題である．数値的にはこのような安定化が可能であることが示唆されているものの，数学的なメカニズムは未解明である．

2 目的と主結果

本講演では，周期解の特別な場合である不安定な定常解 $x^*(t) \equiv p \in \mathbb{R}^n$ の遅延フィードバック制御による安定化を考える．この場合は，(DFC) における τ は任意の正の実数として取れることを注意する．定常解の場合に部分的な結果 ([2]) は得られているものの，数学的に完全な結果は得られていない．また，subcritical Hopf 分岐により生じる軌道不安定な周期解については定常解の問題に帰着できることが知られている ([3])．

不安定な定常解の遅延フィードバック制御が可能であることは昨年度の白浜研究集会でも報告した．今年度は，(DFC) の $x^*(t)$ に沿った線形化方程式の特性方程式

$$\det\bigl(zI - \{Df(p) + (\mathrm{e}^{-z\tau} - 1)K\}\bigr) = 0 \tag{CE}$$

の根の $K \to O$ または $\tau \to 0$ における漸近挙動を示した定理 1 と，K と τ が $Df(p)$ の不安定固有値にどのように依存するかを示した定理 2 を主定理として報告する．

参考文献

[1] Pyragas, K. (1992): Phys. Lett. A **170**, 421–428.

[2] Hövel, P. and E. Schöll (2005): Phys. Rev. E **72**, 0462031-1–7.

[3] Fiedler, B., V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel and E. Schöll (2007): Phys. Rev. Lett. **98**, 114101-1–4.

*キーワード：遅延微分方程式のダイナミクス，遅延フィードバック制御，定常解の安定性，特性方程式

†j-nishi@math.kyoto-u.ac.jp

非適合要素による楕円型境界値問題の数値検証法

宇田　智紀 *　　京都大学 理学研究科

1　概要

本講演では，中尾理論にもとづき，非適合 $\mathcal{P}_1$ 有限要素を用いて楕円型境界値問題に対する精度保証付き数値計算を実現する手法を提案する．1988 年，中尾充宏氏は，適合有限要素法と区間演算を組み合わせ，楕円型境界値問題の厳密解の存在を計算機を用いて証明することに成功した [1]．この手法は中尾の方法と呼ばれるようになり，偏微分方程式に対する計算機援用解析を行う有力な手段として近年注目されている．しかし，非適合有限要素法を用いて中尾の方法を実現する方法は確立されていなかった．そこで，非適合 $\mathcal{P}_1$ 要素を用いて計算できるよう，アルゴリズムで用いる検証式を修正した．また，非適合性に起因して生じる境界積分は数値的に厳密な値を計算することが困難であるため，その境界積分項に対する $O(h)$ の構成的不等式評価を得た（h はメッシュサイズ）．最後に，提案手法にもとづく精度保証付き数値計算例も紹介する．

参考文献

[1] M. T. Nakao, *A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems*, Japan Journal of Applied Mathematics, 5 (1988), pp. 313–332.

*uda@math.kyoto-u.ac.jp

拡散項付きボルツマン方程式の無限エネルギー解

坂本　祥太*　　京都大学大学院　人間・環境学研究科

1　序

拡散項のついた空間一様ボルツマン方程式の、無限エネルギー解について考察する。ボルツマン方程式とは、希薄気体中の分子の分布関数を未知関数とする積分微分方程式で、方程式の解は（少なくとも形式的には）積分値・平均・分散を時間に対して保存することが知られている。これらの量はそれぞれ、物理的には系の質量・運動量・エネルギーの各保存則に対応しているため、解がこれらの性質を満たすかどうかは重要な問題である。解がエネルギーを保存するかどうかを考えるためには初期関数のエネルギーが有界であるという仮定が必要だが、この仮定を取り払い α 次（ただし $0 < \alpha < 2$ で、エネルギーは 2 次モーメントであることに注意）の初期モーメントが有界な解について議論するのが本講演の目的である。このようなボルツマン方程式の解を無限エネルギー解と呼び、その研究は 1980 年代からなされていたが、ここ数年で空間一様なケースについて新たな発展があった（詳しくは [1], [2], [3] とその参考文献を見よ）。それらの結果を拡散項付きのボルツマン方程式に応用し得られたのが、次の主定理である。

2　主定理

定理 1 ([4])**.** $0 < \alpha < 2$ に対し、$P_\alpha(\mathbb{R}^3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の確率測度であって、α 次モーメント $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^\alpha dF(v)$ が有界、$\alpha \geq 1$ のときは加えて平均が 0 なもの全体とする。このとき拡散項のついた空間一様ボルツマン方程式

$$\begin{cases} \partial_t f(v,t) + \delta(-\Delta)^{p/2} f(v,t) = Q(f,f)(v,t), \ (v,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ f(v,0) = f_0(v), \end{cases}$$

（ただし $\delta > 0,\ 0 < p \leq 2$ は定数で、$Q(f,f)$ は衝突作用素）は適当な $\alpha \in (0,2)$ に対し $f_0 \in P_\alpha(\mathbb{R}^3)$ のとき一意解 $f \in C([0,\infty); P_\alpha(\mathbb{R}^3))$ をもつ。この連続性は *Wasserstein* 計量 W_α で定義されるものである。

講演では通常のボルツマン方程式に関する結果をまず概観し、その性質を念頭に入れつつこの主定理について述べる。

参考文献

[1] Cannone, M. and Karch, G., Comm. Pure Appl. Math. **63** (2010), no. 6, 747-778.

[2] Cho, Y.-K., to appear in Kinet. Relat. Models.

[3] Morimoto, Y., Wang, S., Yang, T.,　 to appear in J. Math. Pures Appl.

[4] Sakamoto, S., submitted.

*sakamoto.shota.76r@st.kyoto-u.ac.jp

離散ハングリー戸田方程式に関連づく Totally Nonnegative行列の逆固有値問題について

赤岩　香苗 [*]　　京都大学 情報学研究科 数理工学専攻

1　概要

可積分系の 1 つとして，非線形バネの運動を記述した戸田方程式がよく知られている．戸田方程式の時間変数を離散化した離散戸田方程式は，Jacobi 行列と呼ばれる対称 3 重対角行列の固有値計算に用いられる qd アルゴリズムの漸化式と一致する．**離散ハングリー戸田** *(dhToda: discrete hungry Toda)* **方程式**は離散戸田方程式のある種の拡張とみなせ，

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} + E_{k-1}^{(n+1)} = Q_k^{(n)} + E_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, \\ Q_k^{(n+M)} E_k^{(n+1)} = Q_{k+1}^{(n)} E_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{1}$$

と表される [4]．ここで，k は空間変数，n は離散時間を表す．M は正の整数である．$M = 1$ のとき，離散戸田方程式と一致する．dhToda 変数 $Q_k^{(n)}, E_k^{(n)}$ を用いて帯行列

$$A^{(n)} = L^{(n)} R^{(n+M-1)} \cdots R^{(n+1)} R^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

を導入する．ただし，$L^{(n)}$ は対角成分に 1，副対角成分に $E_k^{(n)}$ が並ぶ下 2 重対角行列，$R^{(n)}$ は対角成分に $Q_k^{(n)}$，副対角成分に 1 が並ぶ上 2 重対角行列である．dhToda 方程式から，行列の時間発展 $A^{(n)} \to A^{(n+1)}$ が相似変形であることを利用して，(2) のように分解される帯型 *Totally Nonnegative (TN)* **行列** $A = A^{(0)}$ の固有値を計算する dhToda アルゴリズムが定式化されている．TN 行列とはすべての小行列式が非負である行列のことで，相異なる正の固有値をもつ．$n \to \infty$ において，$A^{(n)}$ は上三角行列に収束する，すなわち，$Q_k^{(n)} Q_k^{(n+1)} \cdots Q_k^{(n+M-1)}$ が固有値 λ_k，$E_k^{(n)}$ が 0 に収束する [3]．

指定した固有値 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ に対して，固有値 λ をもつ m 次正方行列 A を求める問題を**逆固有値問題**と呼ぶ．逆固有値問題は行列の構造によって様々なクラスに分類されている [2]．

本講演では，dhToda 方程式 (1) における空間変数の発展 $k \to k+1$ に着目することで，(1) に付随する固有値問題を明らかにする．さらに，帯型 TN 行列 $A = A^{(0)}$ の逆固有値問題に対して (1) を利用した有限回反復の解法を提案する [1]．

参考文献

[1] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi and K. Kondo, submitted.

[2] M. T. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, (Oxford University Press, New York, 2005).

[3] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki and Y. Nakamura, Annal. Mat. Pura Appl. **192** (2013), 423–445.

[4] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma, Inverse Problems **15** (1999), 1639–1662.

* akaiwa.kanae.83w@st.kyoto-u.ac.jp

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の行列式解の漸近解析

新庄　雅斗*　　京都大学　情報学研究科

1　概要

複数種の生物間の捕食関係を記述した可積分系として，ハングリーロトカ・ボルテラ (hLV) 系がある．hLV 系に対して時間離散化を施すと，連立離散方程式である離散ハングリーロトカ・ボルテラ (dhLV) 系

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)} \prod_{j=1}^{M} (\delta^{(n)} + u_{k-j}^{(n)}) = u_k^{(n)} \prod_{j=1}^{M} (\delta^{(n+1)} + u_{k+j}^{(n+1)}), \qquad k = 0, 1, \ldots, (M+1)(m-1), \\ u_{-j}^{(n)} := 0, \quad u_{(M+1)(m-1)+j}^{(n)} := 0, \quad j = 1, 2, \ldots, M \end{cases} \tag{1}$$

が得られる．ただし，$u_k^{(n)}$ と $\delta^{(n)}$ はそれぞれ，離散時間 n における生物種 k の個体数と離散パラメータを表わしている．dhLV 系の収束性に関しては，離散パラメータ $\delta^{(n)}$ を正に限った場合のみ示されている [1]．その性質に基づいて数値計算アルゴリズムが定式化されているが，$\delta^{(n)}$ が負の場合については常に収束するかどうかは定かでない．アルゴリズムの実用化を考えると，$\delta^{(n)}$ を負とした dhLV 系の収束を保証する必要がある．

本講演では，dhLV 系の変数が非対称な j 次のカソラチ行列式 [2]

$$C_{i,0}^{(n)} := 1, \quad C_{i,j}^{(n)} := \begin{vmatrix} a_i^{(n)} & a_{i+1}^{(n)} & \cdot & a_{1+j-1}^{(n)} \\ a_i^{(n+1)} & a_{i+1}^{(n+1)} & \cdot & a_{1+j-1}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i^{(n+j-1)} & a_{i+1}^{(n+j-1)} & \cdot & a_{1+j-1}^{(n+j-1)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

を用いて一般項が表現できることに着目し，極限 $n \to \infty$ におけるカソラチ行列式に対する漸近展開

$$C_{i,j}^{(n)} \sim \text{const.} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{j} O(\theta_\ell^n) \right) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \quad 0 < \theta_\ell < 1 \tag{3}$$

の導出について報告する．得られた定理を通じて，離散パラメータ $\delta^{(n)}$ によらず dhLV 系の漸近解析が可能となることも紹介する．

参考文献

[1] A. Fukuda, E, Ishiwata, M. Iwasaki and Y. Nakamura, The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalue, *Inverse Probl.*, **25**, (2009), 015007.

[2] R. Vein and P. Dale, *Determinants and Their Applications in Mathematical physics*, Applied mathematical Science, **134**, Springer, New York, 1999.

*mshinjo@amp.i.kyoto-u.ac.jp

Dirichlet積分量を持つ非線型楕円型方程式について

内免 大輔[*]　　東京工業大学理工学研究科/大阪市立大学数学研究所

本講演では，以下の Dirichlet 積分量を持つ非線型楕円型方程式について考える。

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$N \in \mathbb{N}$，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とし，$a(t)$ は $t \geq 0$ で定義された連続関数で，ある定数 $a_0 > 0$ に対し $a(t) \geq a_0$ を満たすものとする。さらに，$f(x,u)$ は $\Omega \times \mathbb{R}$ 上の連続関数で適当な増大度に関する条件を満たすものとする。(P) は物理系や生物系において現れる種々の時間発展方程式と関連を持つ。例えば，Kirchhoff 型波動方程式；

$$u_{tt} - a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,t,u) \tag{K}$$

がよく知られている [1]。また，Chipot-Lovat[2] によって，以下のような非局所的放物型方程式；

$$u_t - a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x) \tag{CL}$$

が紹介され，その可解性や漸近挙動に関する解析が進められていることも興味深い。(P) はこれらの時間発展方程式の定常問題とみることができる。ところで，近年 (P) が変分構造を持つことに着目した，興味深い研究が多く行なわれている。本講演ではまず，変分法によって得られる次の最も基本的な解析結果を紹介する。

定理 1 (N. 2014 [3]). *$N \leq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界を持つ有界領域，$p > 3$ は Sobolev の埋め込みの意味で劣臨界指数，$a(t) = 1 + t$，$f(x,u) = \lambda u + u^p$ とする。このとき，(P) は全ての $\lambda \leq \lambda_1$ に対し，少なくとも 1 つの解を持つ。さらに，$\lambda > \lambda_1$ が十分 λ_1 に近ければ (P) は少なくとも 2 つの解を持つ。ただし，$\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$ は $-\Delta$ の第一固有値である。*

本論では，上定理の持つ意味を考え，これによって動機づけられる発展的研究課題と最新の研究結果について言及する。

参考文献

[1] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces. Functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations (Trieste, 1993), 220-254, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[2] M. Chipot and B. Lovat, Some remarks on non local elliptic and parabolic problems, *Nonlinear Anal.* **30** (1997) 4619-4627.

[3] D. Naimen, Positive solutions of a nonlinear elliptic equation with the nonlocal coefficient, in preparation.

[*]naimen@math.titech.ac.jp

Euler-α 方程式の数学解析と Euler 方程式との関係性

後藤田剛 * 　京都大学理学研究科

概要

Navier-Stokes 方程式の粘性ゼロ極限と一様等方乱流には深い関係があり, 特に二次元において乱流状態を維持するには, その粘性極限において流体のエンストロフィーが散逸することが重要であるとされている．よって, 非粘性流体の運動を記述する Euler 方程式について, 正則な解はエネルギーを保存するので, 正則でない解が乱流に関係していると思われる．ただし, Navier-Stokes 方程式の解の粘性極限として Euler 方程式の解を構成する場合, 初期渦度がラドン測度の空間に入っていない限り, このような散逸が起こり得ないことが数学的に示されている．しかし, そのような初期値に対しては Navier-Stokes 方程式が可解性を持たないため, 粘性ゼロ極限として Euler 方程式の散逸的弱解を構成するには数学解析的に困難が伴う．そこで, Euler 方程式においてスケール α 以下の情報を平均化して繰り込むことで得られる, Euler-α 方程式について考える．これは Euler 方程式の正則化方程式であり, 乱流現象との関係も深い．例えば, 粘性項を加えた Navier-Stokes-α 方程式の数値計算による研究では, α が小さいときにはその解が乱流と同様の性質を持つことが示されている．加えて, 二次元では初期渦度をラドン測度とした場合でも時間大域的な弱解の一意存在がわかっている．よって, Euler-α 方程式の解の α ゼロ極限として Euler 方程式の散逸的弱解を構成できる可能性がある．

このような背景の下, 二次元 Euler 方程式についてデルタ関数を初期値として形式的に導かれる点渦系と, 同様の初期値に対して Euler-α 方程式から導かれる α 点渦系について研究を行っている．中でも α 点渦系の力学と, その α ゼロ極限における点渦系との関係や解のエンストロフィーの散逸の有無に関しては特に興味を持っている．三個の点渦系については可積分系であることから多くの結果が知られており (例えば, Newton [2] を参照), 京都大学の坂上教授によって, 三体問題において α ゼロ極限でエンストロフィーが散逸すよるような解が構成されている [3]．本講演では, まず Euler-α 方程式について説明した後, Euler 方程式の解と点渦系の解との関連について述べた Marchioro, Pulvirenti の結果 [1] について, Euler-α 方程式と α 点渦系に同様の議論を適用した場合に得られる結果とその両者の違いについて紹介する．また, 点渦力学の観点からみる α 点渦系における α ゼロ極限と点渦系の関係性, その極限でのエンストロフィーの散逸の有無について, 現段階での研究内容についてお話する予定である．

参考文献

[1] Marchioro, C., Pulvirenti, M. : Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids. Applied Mathematical Sciences, 96. Springer, New York, 1994.

[2] Newton, P. K. : The N-Vortex Problem. Analytical Techniques, Springer, 2001.

[3] Sakajo, T. : Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse. J. Fluid Mech. **702**(2012), 188–214.

*gotoda@math.kyoto-u.ac.jp

非線形シュレディンガー方程式の基底状態の漸近安定性のための十分条件について

山添　祥太郎 *　　京都大学大学院 情報学研究科

次の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u = -\Delta u + V(x)u + \beta(|u|^2)u & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$ はラプラシアン, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ は既知関数, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は未知関数である. 典型的な例として, $\beta(s) = \lambda s$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ のとき, (NLS) はボーズ・アインシュタイン凝縮している粒子のふるまいを記述する方程式として知られている.

(NLS) の非自明な解であって $u(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi_\omega(x)$ と書かれるものを定在波解という. ここで $\omega > 0$ は実数のパラメータである. さらに, 定在波解のうち作用汎関数

$$S_\omega(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla_x u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + B(|u|^2) + \omega|u(x)|^2\right) \mathrm{d}x$$

を最小化するものを基底状態という. ただし $B(s) = \int_0^s \beta(s')\,\mathrm{d}s'$ とおいた. V と β に関する適切な仮定のもとで, 基底状態が存在し, 軌道安定であることが知られている [1][3].

軌道安定性の研究からしばらくして, 基底状態にある意味で近い初期値に対する (NLS) の解は $t \to \infty$ において基底状態と漸近自由な項との和のようにふるまうことが, Soffer-Weinstein[4] により示された. この意味での安定性を漸近安定性という. これは軌道安定性より精密な結果である. Soffer-Weinstein の結果では, 基底状態の周りでの線形化作用素の固有値の分布に対して制約があった. この制約は Cuccagna[2] などにより緩められ, 漸近安定性の成立のための一般的な条件が知られるようになった. 講演では Cuccagna[2] による漸近安定性の結果を紹介する.

参考文献

[1] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations I - Existence of a ground state, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82** (1983), 313-345.

[2] S. Cuccagna, The Hamiltonian Structure of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Asymptotic Stability of its Ground States, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 279-331.

[3] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), 549-561.

[4] A. Soffer and M. I. Weinstein, Multichannel Nonlinear Scattering for Nonintegrable Equations, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 119-146.

*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

Navier-Stokes 方程式の厳密解について

湯本　英二*　　京都大学 理学研究科 数学・数理解析専攻

1　概要

円柱の外部領域 $\Omega_b = \{(r,z) | b < r < \infty, -\infty < z < \infty\}$ には,

$$u_r = -\alpha(r - b^2/r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 2\alpha z \tag{1}$$

という形の軸対称なオイラー方程式の厳密解が存在する．ここで，u_r, u_θ, u_z はそれぞれ流体の速度の r 方向，θ 方向，z 方向の成分である．C.-Y.Wang[1] は，無限遠点でこの解に漸近するような軸対称流 Navier-Stokes 方程式の厳密解の存在を数値的に示した．しかしながらその数学的証明は与えられていなかった．([2]) 今回の講演では，この厳密解の存在について議論する．

2　講演内容

(1) に漸近する解の存在は，次の常微分方程式の三点境界値問題

$$\eta f'''(\eta) + f''(\eta) + R(1 + f(\eta)f''(\eta) - f'(\eta)^2) = 0 \qquad (1 < \eta < \infty) \tag{2}$$

$$f(1) = s, \qquad f'(1) = 0, \qquad f'(\infty) = 1 \tag{3}$$

の $s = 0$ の場合に帰着される．この常微分方程式の解について，次の結果が得られた．

定理 1. $s \geqq 0$ の場合，境界値問題 (2), (3) は解を持つ．

$s \neq 0$ の場合にも物理的意味はある．$s > 0$ の場合は円柱表面に吸い込みがある場合，$s < 0$ の場合は円柱表面に湧き出しがある場合にそれぞれ対応する．この定理は $s < 0$ のとき、すなわち湧き出しがある場合については何も言っていない．この場合については，時間があれば話したいと思う．

参考文献

[1] C.-Y. Wang, Axisymmetric stagnation flow on a cylinder, *Quart. Appl. Math.* 32(1974), 207-213.

[2] 岡本　久,『ナヴィエ - ストークス方程式の数理』，東京大学出版会 (2009).

*ageonsen@kurims.kyoto-u.ac.jp

Asymptotics for the reduced Ostrovsky equation

新里　智行 *　　大阪大学 理学研究科

1　導入

Reduced Ostrovksy 方程式の Cauchy 問題を考える：

$$\begin{cases} u_{tx} = u + \left(u^3\right)_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), & x \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{1}$$

$u_0(x)$ は実数値関数とし, 以下では実数値解のみを考える. 方程式 (1) はコリオリ力などの回転の力を考慮した水面波を記述する方程式として知られている 一般化された Ostrovsky 方程式：$(u_t + \alpha u_{xxx} - u^\rho)_x = \beta u$ の高周波の分散を無視したもの（$\alpha = 0$ とおいたもの）として導出される.

本講演の目的は, この方程式の散乱問題を考えることである. 特に, 今回考える $\rho = 3$ の場合は臨界冪となっていることに注意したい.

2　結果の紹介

次の関数空間で解を構成することを考える：

$$\mathbf{X}_0^m = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2; \|\phi\|_{\mathbf{X}_0^m} = \|\phi\|_{\mathbf{H}^m} + \|x\phi_x\|_{\mathbf{H}^5} + \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} < \infty \right\},$$

$$\mathbf{X}_T^m = \left\{ u\left(t\right) \in \mathbf{C}\left(\left[0, T\right); \mathbf{L}^2\right); \|u\|_{\mathbf{X}_T^m} < \infty \right\},$$

ノルムは以下で定義される：

$$\|u\|_{\mathbf{X}_T^m} = \sup_{t \in [0,T)} \langle t \rangle^{-\epsilon^{\frac{1}{7}}} \left(\|u\left(t\right)\|_{\mathbf{H}^m} + \|\mathcal{J} u_x\left(t\right)\|_{\mathbf{H}^5} + \|u\left(t\right)\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} \right) + \sup_{t \in [0,T)} \langle t \rangle^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^2},$$

ここで $\epsilon > 0$ は小さい正の定数とする. また $\mathcal{J} = x - t\partial_x^{-2}$, $\partial_x^{-m} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^{-m}\mathcal{F}$, $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換, フーリエ逆変換とする.

定理 1 ([1])**.** 初期条件は $u_0 \in \mathbf{X}_0^m$, $m > 10$ とし, $\|u_0\|_{\mathbf{X}_0^m} \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$ は十分小さいとする. このとき, *(1)* の時間大域解 $u \in \mathbf{X}_\infty^m$ が一意に存在し, 次の時間減衰評価を満たす *:*

$$\|u\left(t\right)\|_{\mathbf{H}_\infty^2} \leq C \left\langle t \right\rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

さらに散乱状態 $W \in \mathbf{H}_\infty^{0,2}$ が存在し, 十分大きな $t \geq 1$ に対し, 次の漸近展開が成り立つ*:*

$$u\left(t\right) = \Re \sqrt{\frac{2}{t}} \theta(x) W\left(\chi\right) \exp\left(-i \left(\frac{2t}{\chi} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\chi}{\sqrt{2}} \left|W\left(\chi\right)\right|^2 \log t \right) \right) + O\left(t^{-\frac{1}{2}-\delta}\right),$$

ここで, $\delta \in (0, 1/12)$, $\chi = \sqrt{t/-x}$, $\theta \in \mathbf{S}$, $|\theta(x)| \leq 1$, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & 0 \leq x \end{cases}$.

参考文献

[1] Niizato, Tomoyuki, *Asymptotic behavior of solutions to the short pulse equation with critical nonlinearity.* Nonlinear Anal. **111** (2014), 1532.

*t-niizato@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Analysis for Solving Stationary Transport Equations Numerically

Daisuke KAWAGOE*
Graduate School of Informatics, Kyoto University

Setting

Let Ω be the rectangular in $\mathbb{R}^2$ and S^1 be the circle. We consider the following integro-differential equation:

$$\xi \cdot \nabla_x I(x,\xi) + (\mu_a + \mu_s) I(x,\xi) = \mu_s \int_{S^1} p(\xi \cdot \xi') I(x,\xi\prime) \sigma_{\xi'}, \quad (x,\xi') \in \Omega \times S^1, \tag{1}$$

where μ_a and μ_s are nonnegative constants, $\cdot$ means the inner product, $d\sigma$ is the line element of S^1 and p is defined by:

$$p(\xi \cdot \xi') := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - g^2}{1 + g^2 - 2g\xi \cdot \xi'}, \quad (\xi, \xi') \in S^1 \times S^1.$$

Equation (1) is called the stationary transport equation.

We pose a boundary condition as follows:

$$I(x,\xi) = I_0(x,\xi), \quad (x,\xi) \in \Gamma_-, \tag{2}$$

where

$$\Gamma_- := \left\{ (x,\xi) | x \in \partial\Omega, \xi \in S^1, n(x) \cdot \xi < 0, n(x) \textit{ is the outer normal of } \partial\Omega \textit{ at } x \right\}.$$

PROBLEM . *In the setting above, what boundary conditions (2) should we pose to obtain the unique solution of equation (1) whose regularity guarantees convargence of a numerical solution?*

In this talk, I introduce a sufficient condition to obtain the sufficient smooth solution of equation(1).

Acknowledgements

I would like to thank Professor Yoshio Tsutsumi for his support. I am grateful to the organizers who give me an opportunity to join this workshop.

References

[1] D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk and I.V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*,(VSP, The Netherlands, 2002) .

[2] H. FUJIWARA, *Fast Numerical Computation for the Stationary Radiative Transport Equation Using Multigrid Methods*(in Japanese), *Transactions of JASCOME* **11**(2011) pp.13-18.

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp