

第 3 回白浜研究集会

場所：南紀白浜温泉の宿 白浜御苑 (会議室)

日程：12 月 12 日 (月)～15 日 (木)

講演プログラム

12 月 12 日		12 月 13 日		12 月 14 日		12 月 15 日	
		9:00～9:40	岩木耕平	9:00～9:40	加藤孝盛	9:00～9:40	岡村和弥
		9:50～10:30	廣瀬三平	9:50～10:30	岡本葵	9:50～10:30	長谷部高広
		10:40～ 11:20	中島誠	10:40～11:20	田部井希一	10:40～11:20	安藤浩志
		11:30～ 12:10	白石大典	11:30～12:30	前川泰則		
昼休み							
		13:30～14:10	多羅間大輔	14:00～14:40	楠岡誠一郎		
		14:20～15:00	嶺山良介	14:50～15:30	堀由昂		
15:30～16:10	水谷治哉	15:10～15:50	佐藤寛之	15:40～16:20	稲田哲生		
16:20～17:00	宮路智行	16:10～16:50	池田正弘	16:30～17:30	矢野孝次		
17:10～17:50	山崎陽平	17:00～17:40	岸本展				

講演タイトル

12 月 12 日 (月)

15:30～16:10 水谷治哉

Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and unbounded potentials

16:20～17:00 宮路智行

Bifurcation analysis for the Lugiato-Lefever equation

17:10～17:50 山崎陽平

$\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の連立 Schrödinger 方程式の線型安定性

12 月 13 日 (火)

9:00～9:40 岩木耕平

Painlevé 関数の完全 WKB 解析

9:50~10:30 廣瀬三平

(1, 4) 型の超幾何系に対する Stokes 幾何について

10:40~11:20 中島誠

Large deviation principle for branching processes in random environment with geometrical offspring distribution. (ランダム環境中の分枝過程に関する大偏差原理)

11:30~12:10 白石大典

ランダムウォークのカットポイントについて

12:10~13:30 昼休み

13:30~14:10 多羅間大輔

Elliptic K3 surfaces as dynamical models and their Hamiltonian monodromy

14:20~15:00 嶺山良介

Snowflake 群の測地線について

15:10~ 15:50 佐藤寛之

リーマン多様体上の最適化アルゴリズムおよびその数値線形代数への応用

16:10~ 16:50 池田正弘

空間 2 次元における Dirac-Klein-Gordon 方程式系の解の漸近的振る舞いについて

17:00~ 17:40 岸本展

Blow-up solution for the Zakharov system on 2D torus

12 月 14 日 (水)

9:00~ 9:40 加藤孝盛

Well-posedness for the Kawahara equation with low regularity data

9:50~ 10:30 岡本葵

Chern-Simons-Dirac 方程式の初期値問題の適切性について

10:40~ 11:20 田部井希一

Local Behavior of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations

11:30~12:30 前川泰則

On fundamental solutions to fractional diffusion equations with divergence free drift

12:30~14:00 昼休み

14:00~14:40 楠岡誠一郎

Diffusion Processes in Thin Tubes and their Limits on Graphs

14:50~15:30 堀由昂

Optimal control problem of portfolio with partial information: Hamilton-Jacobi-Bellman equation approach

15:40~16:20 稲田哲生

Hilbert 空間上における確率偏微分方程式の解の強一意性について

16:30~17:30 矢野孝次

安定レヴィ過程とその条件付けについて

12 月 15 日 (木)

9:00~9:40 岡村和弥

2 次形式と相対エントロピー -量子力学を背景として-

9:50~10:30 長谷部高広

遠方での確率測度の級数展開について

10:40~11:20 安藤浩志

有限型 Polish 群について

この研究集会は

・京都大学 大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

「数学のトップリーダーの育成 ―コア研究の深化と新領域の開拓」

・科学研究費補助金基盤研究 (S)

「非線形発展方程式の凝縮現象と解の構造」(研究代表者 堤誉志雄, 課題番号 23224003)

の協力のもとに開催されます.

Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and unbounded potentials

水谷 治哉 (京都大学数理解析研究所, hmizutan@kurims.kyoto-u.ac.jp)

以下の $\mathbb{R}^d$ 上の変数係数 Schrödinger 方程式を考える.

$$i\partial_t u(t) = Hu(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad H = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} g^{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + V(x).$$

$$(A1) \quad g^{jk}, V \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}). \quad (g^{jk})_{j,k} \text{ は対称で, } \exists c > 0 \text{ s.t. } \sum_{j,k} g^{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq c|\xi|^2, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

$$(A2) \quad \exists \mu \geq 0 \text{ s.t. } |\partial_x^\alpha (g^{jk}(x) - \delta_{jk})| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\mu-|\alpha|}, \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{2-\mu-|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

上記の仮定の下で H は L^2 上唯一つの自己共役拡張 (再び H と書く) を持ち, L^2 上の強連続ユニタリ群 e^{-itH} を生成する. また, 解は $u(t, x) = e^{-itH} u_0(x)$ で与えられる.

この講演では, e^{-itH} に対する Strichartz 評価と呼ばれる L^p 空間での平滑化作用について考察する. 定数係数の場合には沢山の先行研究がある. 例えば $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$, $\partial_x^\alpha V(x) = O(\langle x \rangle^{2-|\alpha|})$, とすると, $|t| \ll 1$ のとき, e^{-itH} は Fourier 積分作用素 (FIO) 表示を持つことが知られている. FIO 表示と停留位相法から e^{-itH} の $L^1 \rightarrow L^\infty$ 評価 ($\|e^{-itH}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq C|t|^{-d/2}$) が従い, さらに双対性の議論を用いることで時間局所 Strichartz 評価が得られる:

$$\|e^{-itH} u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad p \geq 2, \quad 2/p = d(1/2 - 1/q), \quad (p, q) \neq (2, \infty).$$

一方, $V(x)$ が遠方で減衰することを仮定すれば, 変数係数の場合にも時間局所 Strichartz 評価が成り立つ ([2]). さらに, ある種の非コンパクト多様体上への拡張も知られている (例えば, [3, 1, 4] およびその参考文献を参照せよ).

しかし, 変数係数かつポテンシャル $V(x)$ が非有界な場合には Strichartz 評価に関する結果は今のところないと思われる. ここでは (少なくとも) 空間遠方における増大度が劣 2 次程度ならば, それが成り立つことを紹介する.

定理 1. $\mu > 0$ とする. また, 全ての測地流が非捕捉的であるとする. このとき, $T > 0$, $p \geq 2$, $q < \infty$, $2/p = d(1/2 - 1/q)$ に対して,

$$\|e^{-itH} u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

漸近的平坦性を仮定しない場合にも, 初期値に少しだけ微分可能性を仮定すると類似の評価が成り立つ.

定理 2. $\mu = 0$ とする. また, 全ての測地流が非捕捉的であるとする. このとき, $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $p \geq 2$, $q < \infty$, $2/p = d(1/2 - 1/q)$ に対して,

$$\|e^{-itH} u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_{T, \varepsilon} \|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{R}^d)}, \quad u_0 \in H^\varepsilon(\mathbb{R}^d).$$

References

- [1] J.-M. Bouclet, Anal. PDE. **4** (2011), 1–84.
- [2] J.-M. Bouclet, N. Tzvetkov, Amer. J. Math. **129** (2007), 1565–1609.
- [3] A. Hassell, T. Tao, J. Wunsch, Amer. J. Math. **128** (2006), 963–1024.
- [4] H. Mizutani, to appear in Comm. Partial Differential Equations.

Bifurcation analysis for the Lugiato-Lefever equation

Tomoyuki Miyaji*

Isamu Ohnishi §

Yoshio Tsutsumi ¶

We show some results on bifurcation analysis and numerical simulation for the Lugiato-Lefever equation (LLE). LLE is a cubic nonlinear Schrödinger equation (CNLS) with damping, detuning and driving force. It is a model for describing the evolution of transversal patterns in an optical cavity with a Kerr medium. It is given by

$$\partial_t E = -(1 + i\theta) E + ib^2 \Delta E + i|E|^2 E + E_{\text{in}}, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

where $x = (x_1, \dots, x_d)^T$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, and $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$ is the Laplacian.

The parameters $b^2, \theta \in \mathbf{R}$ are diffraction and detuning parameters, respectively. $E = E(x, t) \in \mathbf{C}$ denotes a slowly varying envelope of electric field. $E_{\text{in}} \geq 0$ denotes the intensity of spatially homogeneous driving field, and it is a main control parameter.

Numerical simulations suggest that LLE in one or two dimensional space has solitary wave solutions in a certain range of parameters. See Figure 1.

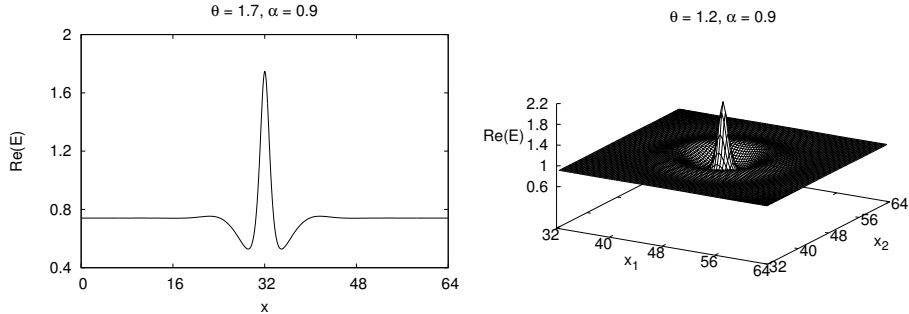


Fig. 1 Stationary solitary waves. (Left) $\Omega = (0, 64) \subset \mathbf{R}^1, b^2 = 1, \theta = 1.7, E_{\text{in}} \simeq 1.21491$; (right) $\Omega = (0, 96)^2 \subset \mathbf{R}^2, b^2 = 1, \theta = 1.2, E_{\text{in}} \simeq 0.990454$.

In contrast to CNLS, LLE does not satisfy any conservation law of CNLS. Typically, a solitary wave solution of LLE appears as an equilibrium point. Moreover, for 2D LLE, a localized spot can undergo a Hopf bifurcation, and it results in a spatially localized and temporally oscillating solution called oscillon. Such solutions are understood as dissipative structures resulting from the balance between gain and loss of energy. Besides, no explicit analytical solutions are known for LLE.

In this talk, we summarize some results on bifurcation analysis for stationary solutions of the equation in one or two space dimensions.

* Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502 JAPAN, email: tmiyaji@kurims.kyoto-u.ac.jp

§ Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University

¶ Department of Mathematics, Kyoto University

$\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の連立 Schrödinger 方程式の線型安定性

山崎 陽平

京都大学理学研究科数学教室 修士2年

1 Abstract

$\mathbb{R}$ を実数, $\mathbb{Z}$ を整数, $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$ とする. u_1, u_2 を $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ から $\mathbb{C}$ への関数とする. $k \in \mathbb{R}, \gamma > 0, L > 0$. 講演では以下の連立 Schrödinger 方程式を $(u_1(t), u_2(t)) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L, \mathbb{C})$ 上で考える.

$$(SNLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u_1 = -\Delta u_1 - \kappa |u_1| u_1 - \gamma \bar{u}_1 u_2 \\ i\partial_t u_2 = -2\Delta u_2 - 2|u_2| u_2 - \gamma u_1^2. \end{cases}$$

この方程式は $\mathbb{R}^N (N \leq 3)$ 上の方程式として [1] で扱われており, プラズマでのラマン効果を記述する方程式を簡略化したものである. この方程式には常微分方程式

$$-\partial_x^2 \varphi + \omega \varphi - \varphi^2 = 0$$

の正値対称解 $\varphi_\omega(x)$ とある正数 α, β を用いて, $(u_1(t, x, y), u_2(t, x, y)) = (\alpha e^{i\omega t} \varphi_\omega(x), \beta e^{2i\omega t} \varphi_\omega(x))$ と表せる解が存在する. ただし, $\omega > 0$. これらの解は定在波と呼ばれ, 時に重要な現象として物理現象で表れる. 定在波が現象として現れるかどうかは定在波が”安定”と呼ばれるときに限ると考えられている. 定在波が安定であるか不安定であるかは方程式が現象を表しているかどうかを測る指標になるため重要である. 安定性に関しては以下の結果がある.

定理 1. (Colin, Ohta[1]) $\mathbb{R}^N (N \leq 3)$ 上の (SNLS) について考える. ある $\Omega_0 \subset \{(\gamma, \kappa) : \gamma > 0, \kappa \in \mathbb{R}\}$ が存在して以下を満たす ψ_ω を $-\Delta \psi + \omega \psi - \psi^2 = 0$ の正値球対称解とする. $(\gamma, \kappa) \in \Omega_0$ に対して, ある $\alpha, \beta > 0$ が存在して, 定在波 $(\alpha e^{i\omega t} \psi_\omega, \beta e^{2i\omega t} \psi_\omega)$ は軌道安定である.

本講演では $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上でこの定在波の線形安定性について紹介する. $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上で方程式を考える動機は [2] による. 1次元の方程式である KdV 方程式の定在波 $3\text{sech}^2(x/2)$ は軌道安定であるという結果がある. [2] では KdV 方程式を $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上に拡張した KP-I 方程式で L が $4/\sqrt{3}$ より真に大きいと定在波 $3\text{sech}^2(x/2)$ は軌道不安定になることが示されている. この現象が (SNLS) の時には起きるのかを線型安定性の点で考察するのが本講演の目的である. では線型安定性について紹介する.

(SNLS) を $(v_1, v_2) = (e^{i\omega t} u_1, e^{2i\omega t} u_2)$ で変数変換し, エネルギー汎関数 E , チャージ Q と歪対称作用素 J を用いて方程式を

$$\partial_t(v_1(t), v_2(t)) = J(E'((v_1(t), v_2(t)) + \omega Q'((v_1(t), v_2(t))))$$

で表す. ただし, ” ’ ” は Gâteaux derivative を表す. この方程式の $(\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)$ での線形化作用素 $S_\omega((\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)) := E''((\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega)) + \omega Q''((\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega))$ を用いて線形安定性を定義する.

定義 2. (定在波の線形安定性) $JS_\omega((\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega))$ が実部正の固有値を持つとき定在波 $(\alpha e^{i\omega t} \varphi_\omega, \beta e^{2i\omega t} \varphi_\omega)$ は線形不安定という. また, 線形不安定でない時, 線形安定という.

講演ではトーラスの大きさである L を動かすことにより, $JS_\omega((\alpha \varphi_\omega, \beta \varphi_\omega))$ の実部正の固有値がどのように変化するかを考察したい. 主結果は講演中に述べることとする. 計算が間に合えばこの線形不安定性を用いた軌道不安定性の結果も紹介したい.

参考文献

- [1] M.Colin, M.Ohta, Bifurcation from semi-trivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, arXiv:1102.1545v1.
- [2] F.Rousset, N.Tzvetkov, Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models, Ann.I.Poincaré-AN 26(2009)477-496.

Painlevé 函数の完全 WKB 解析

岩木耕平*

京都大学 数理解析研究所 D1

「Painlevé 方程式」とは、ある非線形微分方程式たちの総称であり、「可積分系」の一種である。可積分系は数学の様々な分野、さらには理論物理にも顔を出す。その中でも Painlevé 函数は、「21 世紀の特殊函数」として非常に注目されている。従って、「Painlevé 函数が満たす様々な公式を発見する」というのは（他の分野への応用という観点からも）非常に重要な問題である。しかし、方程式が非線形であるので、その解析は容易ではない。この Painlevé 函数を解析する際に、よく用いられる手法の 1 つとして、「モノドロミー保存変形」の理論がある。これは、「ある線形微分方程式のモノドロミーを調べることで Painlevé 函数が理解できる」というものである。([3].)

一方、「完全 WKB 解析」とは (Planck 定数 $\hbar$ のような小さなパラメータを含む特異摂動型の) 微分方程式の解法のひとつであり、量子力学で用いられる WKB 近似法から派生した手法である。これは、発散級数の総和法のひとつとして知られている「Borel 総和法」を適用することにより、従来の WKB 法を単なる近似解法ではなく、exact な解析にしようという Voros の思想から生まれた。([4].) この解析の強みは、微分方程式の大域的な解析 (モノドロミーの計算など) に対して非常に有効なことである。こうした背景から、「完全 WKB 解析を用いて Painlevé 方程式の解析を行う」という発想は自然であり、これまで様々な結果を生んできた。(例えば [2].)

講演では完全 WKB 解析の理論や思想を簡単に説明し、その Painlevé 方程式への応用について説明するつもりである。さらに時間が許せば、大きなパラメータ $\eta (= 1/\hbar)$ を含んだ II 型 Painlevé 方程式

$$(P_{II}) : \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2(2\lambda^3 + t\lambda + c)$$

の解析に関する講演者の結果 ([1]) についても簡単に触れようと思う。(恐縮ながら今回はレビュー中心の話にさせて頂きたいと思います.)

参考文献

- [1] K.Iwaki : Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, arXiv:1106.0612.
- [2] 河合隆裕, 竹井義次 : 特異摂動の代数解析学, 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [3] 岡本和夫 : パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [4] A.Voros : The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. Henri Poincaré, **39**(1983), 211-388.

*iwaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

(1,4) 型の超幾何系に対する Stokes 幾何について

廣瀬 三平

京都大学 数理解析研究所

微分方程式の WKB 解析を考える際にその方程式の Stokes 幾何, つまり変わり点と Stokes 曲線からなる幾何を調べる事は微分方程式の WKB 解の性質を調べる際に重要であって, これまで常微分方程式の場合に対して調べられてきた. ここで 2 階方程式の場合とは異なり, 高階, つまり 3 階以上の常微分方程式においては “新しい Stokes 曲線”, つまり変わり点を通らない Stokes 曲線が現れる事が示された. その後, この新しい Stokes 曲線は “仮想的変わり点” と呼ばれる通常の変わり点とは異なるタイプの変わり点から出る Stokes 曲線であるということが示された. これらの新しい Stokes 曲線や仮想的変わり点は高階方程式の WKB 解析の困難さを表している.

一方, これまで常微分方程式に対して議論されてきた WKB 解析をホロノミック系に対して拡張することは自然な疑問ではあるが, ほぼ手付かずの状態である. この講演では, (1,4) 型の超幾何函数

$$\psi = \int \exp \{ \eta (t^3 + x_2 t^2 + x_1 t) \} t^{-\eta\alpha-1} dt.$$

の満たすホロノミック系 ((1,4) 型の超幾何系と呼ぶ)

$$\begin{cases} \left(3 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + 2x_2 \eta \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1 \eta^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha \eta^3 \right) \psi = 0, \\ \left(\eta \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \psi = 0. \end{cases}$$

に対する WKB 解析, 特にその Stokes 幾何を考察する. さらにここでは $x_2 = c$ と固定した (1,4) 型の超幾何函数の満たす常微分方程式

$$\left(3 \frac{d^3}{dx_1^3} + 2c\eta \frac{d^2}{dx_1^2} + x_1 \eta^2 \frac{d}{dx_1} - \alpha \eta^3 \right) \psi = 0.$$

に現れる新しい Stokes 曲線が (1,4) 型の超幾何系の Stokes 幾何においてどのように捉えられるのかを議論する.

参考文献

- [A] 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録, 1433, 2005, pp. 1-8.
- [AKT] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学 — exact WKB analysis について —, 数学, **45**, 1993, pp. 299-315.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [T] 竹井義次, 完全 WKB 解析, そして完全最急降下法 — 特異摂動の代数解析学続論 —, 数学, **55**, 2003, pp. 350-367.

ランダム環境中の分枝過程に関する大偏差原理

中島誠*

本講演ではランダム環境中の分枝過程と呼ばれる確率モデルに関する話をする。

分枝過程は人口の増加を確率的に調べるモデルであり、他の数理物理の分野でも現れるモデルである。その定義には分枝確率と呼ばれる確率分布 q を使う。ここで分枝確率とは次のような確率分布の元である。

$$\mathcal{P} = \left\{ q = \{q(k)\}_{k=0}^{\infty} \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} q(k) = 1, q(0) + q(1) < 1 \right\}.$$

分枝確率 q は一つの粒子が k 個に分裂する確率が $q(k)$ であるということを意味している。ランダム環境中の分枝過程は次のように定義される.: i) 時刻 0 では 1 粒子のみ存在する. ii) 時刻 n で存在する粒子は次の時刻にそれぞれ独立に分枝確率 q_n に従って分裂する. iii) 分枝確率 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ は独立同分布に与えられる確率変数。

このモデルに関しては次のことが知られている。

Theorem 1. $\mathbb{E}[\log m(q_n)] > 0$ を仮定する。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n = \mathbb{E}[\log m(q_0)], \quad a.s. \text{ on } \{surv.\}$$

ここで $m(q_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k q_n(k)$. Z_n は時刻 n での総粒子数. $\{surv.\} = \{Z_n > 0, \forall n\}$.

ここでランダムウォークの大偏差原理について述べておくと次のことが知られている。

Theorem 2. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を独立同分布の $\mathbb{R}$ 値確率変数列とする. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ とする. ある条件を仮定すると凸下半連続関数 $\psi : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ が存在し任意の Borel 集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して,

$$-\inf_{x \in B^\circ} \psi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \in B \right) \leq -\inf_{x \in \bar{B}} \psi(x)$$

が成り立つ。

Remark ランダムウォークの場合 $\psi(s)$ は $s = E[X_0]$ でのみ 0 となる。

この関数 ψ を rate function と呼ぶ。大偏差原理は“レア”な事象を解析する道具として扱われる他、統計力学や他の分野で非常に重要な道具である。

本講演の主題は“レア”な事象である $\left\{ \frac{1}{n} \log Z_n \in B \right\}$ について調べ rate function の存在を示し特定することである。粒子が常に 1 つ以上の粒子に分裂する場合については Bansaye, Berestycki などらによって示されている。粒子が死滅することがある場合は特に $\log Z_n = -\infty$ となることがあり扱いが難しい。

主結果 1 では死滅することがありうる場合での大偏差原理を示した。主結果を記述するために $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}_g$ を導入しておく。

$$\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{P} : q(0) = 1 - b, q(k) = b(1 - p)p^{k-1}, k \geq 1, p, b \in (0, 1)\}.$$

また、主結果 2 では条件付き確率測度 $\mathbb{P}(\cdot | 0 < Z_n \leq e^{cn})$ の下で $\left\{ Y_t^{(n)} = \frac{1}{n} \log Z_{[nt]} : t \in [0, 1] \right\}$ がどのような成長をしているのかを調べた。

* 京都大学大学院理学研究科数学教室博士後期課程 3 年 nakamako@math.kyoto-u.ac.jp

ランダムウォークのカットポイントについて

白石大典

京都大学数理解析研究所博士課程2年

S^1, S^2 を $\mathbb{Z}^d$ ($d = 2, 3$) 上の原点から出発する独立なシンプルランダムウォーク (SRW) とする。SRW のカットポイント近傍のパスの幾何学的構造を模索するため、[1] において極限測度

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\cdot \mid S^1[0, \tau^1(n)] \cap S^2[1, \tau^2(n)] = \emptyset) =: P^\sharp(\cdot)$$

の存在を示した。これにより「出発後2度とお互いに交わることのない」ように条件付けた two-sided random walk の考察が可能となる。ここで P は S^1, S^2 の確率測度を表わし、

$$\tau^i(n) = \inf\{k \geq 0 : |S^i(k)| \geq n\}$$

は S^i が初めて原点から (Euclid 距離で) n 以上離れる時刻を表わす。

$P^\sharp$ に法則を従う two-sided RW を $(\bar{S}^1, \bar{S}^2)$ で表わす。構成の仕方から $(\bar{S}^1, \bar{S}^2)$ のパスは出発後交わることはない。すなわち

$$\bar{S}^1[0, \infty) \cap \bar{S}^2[1, \infty) = \emptyset$$

が $P^\sharp$ -a.s. で成立する。それでは $\bar{S}^i$ と通常のシンプルランダムウォーク S^i はどのように異なるのであろうか？ 2次元の場合に $\bar{S}^i$ は次のような通常の SRW とは異なる性質を持つことが [2] の中で示された。

- $\bar{S}^i$ は非再帰的。
- $\bar{S}^i$ は無限個のカットポイントを持つ。
- $\bar{S}^1[0, \infty) \cup \bar{S}^2[0, \infty)$ 上の SRW は sub-diffusive である。

本講演ではどうして上にあげたような違いが生じるのかできるだけわかりやすく説明したい。

References

- [1] Shiraishi, D. Two-sided random walks conditioned to have no intersections. (2011) preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1106.529>
- [2] Shiraishi, D. Random walk on non-intersecting two-sided random walk trace is subdiffusive in low dimensions. Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

Elliptic K3 Surfaces as Dynamical Models and their Hamiltonian Monodromy

京都大学大学院情報学研究科 数理工学工学専攻

多羅間 大輔¹

この講演では楕円 K3 曲面上に実 4 次元の可積分系を楕円曲面の Weierstraß 標準形を用いて具体的に構成し、それを使って得られたある特別な Hamilton モノドロミーの構造を持つ例について述べる。

Liouville の意味での古典完全積分可能系とは、 $2n$ 次元の相空間上の Hamilton 力学系であって、Hamilton 関数を含む n 個の函数的に独立で Poisson 可換な第一積分の存在するものをいう。Liouville-Arnol'd の定理によれば、 n 個の第一積分を並べて得られる運動量写像の正則点では作用・角変数をとることができる。(ただし、運動量写像の対応するファイバーは連結かつコンパクトとする。)しかし、作用・角変数が大域的にとれるためにはいくつかの位相幾何学的な障害があり、(Hamilton) モノドロミーはそのひとつである。数学的な観点からは、完全積分可能系は Lagrange トーラスファイブレーションへと一般化される。モノドロミーは一般のトーラスファイブレーションに対して定義される位相的不変量であるが、力学系との関係でモノドロミーがとりあげられるのは、(Hamilton) モノドロミーがその完全積分可能系の分岐現象を反映したものである。

近年、Hamilton モノドロミーの量子版である量子モノドロミーが、量子化学などとも関連付けられながら研究されている。半古典近似の考え方によればこの量子モノドロミーの概要は以下ようになる。与えられた古典完全積分可能系に対し、付随する運動量写像は Lagrange トーラスファイブレーションとみなせる。このファイブレーションの Bohr-Sommerfeld ファイバーに対応する運動量写像の像の点の全体を考えると、これらの点は局所的に格子の構造を持つ。しかし、一般には特異ファイバーの存在により、この格子は全体としては欠損を許すことになる。そこで局所的な格子のうちひとつの基本平行四辺形を選んで局所的な格子の構造に沿って平行移動を行う。この一連の操作によってもとの基本平行四辺形は別の平行四辺形に移り、それらの間の変換は何らかの行列で記述される。この行列を量子モノドロミーとよぶのである。格子の欠損による量子モノドロミーの解釈は B. Zhilinskiĭ [1] が与えている。

以上のように、古典完全積分可能系から出発して量子モノドロミーを経て格子の欠損に至ったわけであるが、逆の問題提起ができる。つまり、与えられた欠損を持つ格子の構造に対し、古典完全積分可能系でその量子モノドロミーを考えることにより、もとの欠損を持つ格子の構造が得られないかと問うことが可能である。自然界におけるさまざまな格子の欠損の例を視野に入れて、Zhilinskiĭ はそのような逆の問題の好例としてヒマワリの花の観察を通して得られる格子の欠損の構造をとりあげ、それに対応する古典完全積分可能系が実際に構成できるか否かを問題にしている。実際、ヒマワリの花を観察すると、 2π -回転を表す単位モノドロミー行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を読み取ることができる。これに関しては、対応する古典完全積分可能系は K3 曲面から得られるのではないかと Zhilinskiĭ によって予想されていたが、 2π -回転を表す単位モノドロミー行列をもつ力学モデルの具体的構成はこれまで行われていなかった。

この講演では、楕円 K3 曲面上に実 4 次元の可積分系を楕円曲面の Weierstraß 標準形を用いて具体的に構成し、その Hamilton モノドロミーについても言及する。ただし、ここでいう可積分系とは Lagrange トーラスファイブレーションのことである。講演では、楕円 K3 曲面をどのように実 4 次元 Lagrange トーラスファイブレーションとみなすことができるかについて述べ、その具体的構成を楕円曲面の Weierstraß 標準形を用いて与える。最後に、24 個の I_1 型特異ファーターをもつ K3 力学モデルで、ある 12 本の非自明な特異ファイバーの像となる底空間の 12 点を囲む閉曲線に対応するモノドロミーが単位行列となるものを構成する。

参考文献

[1] B. Zhilinskiĭ, Quantum monodromy and pattern formation, J. Phys. A, 43, 434033, 2010.

¹JSPS Research Fellow

Snowflake 群の測地線について

大阪大学大学院理学研究科 嶺山良介^{*1}

概要

等周指数 (isoperimetric exponent) とは、有限表示群に対して定まる擬等長不変量である。これは群論におけるある種の等周関数である Dehn 関数のオーダーとして定義される。すなわち、領域の周囲の長さと面積の増大度の関係を表す指数である。与えられた有限表示群についてその群が満たす等周不等式を調べるということは、その群に対する、いわゆる語の問題の複雑さと密接に関係しており、幾何学的群論の重要な問題である。

等周指数による群の幾何学的特徴付けは、M.Gromov の双曲的群が等周指数 1 であることをはじめ、非正の定曲率を持つコンパクト曲面の基本群は等周指数 2 を持つことが知られており、1 と 2 の間には等周指数になり得る数がないことも明らかになっている。そこで 2 以上の数について等周指数になり得るか、という疑問が自然に湧く。ここでは、2 以上の等周指数を持つ群の例として N.Brady と M.Bridson によって作られた、**snowflake 群**に注目し、その素朴な拡張について、測地語を構成することでより簡明に等周指数が計算できることについて述べたい。

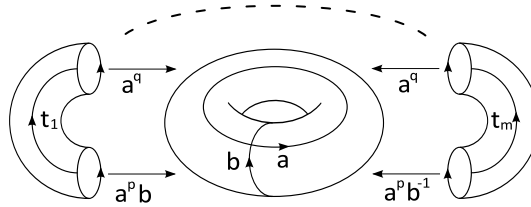
1 目標

snowflake 群は二次元トーラスにアニュラスを偶数個貼付けることによって得られる”曲面”の基本群である。この”曲面 (多様体ではない)”は二次元 CW 複体であると思える。

定義 1.1 アニュラスの数を m で表す。添字集合 $I = \{1, \dots, m\}$ を $\#I_1 = \#I_2$ であるような二つの組にわける。そして関係集合 R_1, R_2 を $p > q \geq 1$ に対して

$$R_1 = \{t_i a^q t_i^{-1} (a^p b)^{-1} \mid i \in I_1\}, \quad R_2 = \{t_i a^q t_i^{-1} (a^p b^{-1})^{-1} \mid i \in I_2\}$$

と定める。この関係に沿ってアニュラスを貼付ける。



このようにして得られた複体の基本群 G は、生成元系を $X = \{a, b, t_1, \dots, t_m\}$ とすれば

$$G = \langle X \mid [a, b], R_1, R_2 \rangle$$

となる。これを **snowflake 群**という。

定理 1 δ_G を G に関する Dehn 関数とすると、 $\delta_G(n) \simeq n^{2\alpha}$ である。ここで、 $\alpha = \log_2 2p/q$ 。

^{*1} r-mineyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

リーマン多様体上の最適化アルゴリズム およびその数値線形代数への応用

佐藤 寛之

概要

ある領域で定義された実数値関数の最小点を求める問題を最適化問題という。従来、ユークリッド空間で定義された関数についての最適化手法が研究されてきたが、変数に制約条件がある場合とない場合では事情が大きく異なり、制約条件なしの問題の解法として知られている最急降下法やニュートン法などのアルゴリズムは、制約条件付きの問題には一般には適用できない。

しかし、制約条件付きの最適化問題であっても、制約条件を満たす点全体がリーマン多様体である場合、その問題をユークリッド空間における問題ではなく、リーマン多様体上の制約条件なしの問題であると見なせる。すると、リーマン多様体上に拡張した最急降下法やニュートン法などの最適化手法を適用することによってその問題を解くことができる。

本講演では、最初にユークリッド空間における最適化手法とリーマン多様体上の最適化手法を概説した後、主に、グラスマン多様体上のレイリー商と呼ばれる関数についての最適化アルゴリズムを紹介する。また、行列の固有値問題への応用を見据え、レイリー商最適化問題を実際に解いた数値計算結果を紹介する。

空間2次元における Dirac-Klein-Gordon 方程式系の解 の漸近的振る舞いについて

池田 正弘 (大阪大学大学院理学研究科)*

1. イントロダクション

Dirac-Klein-Gordon(DKG) 方程式系の“解の漸近的振る舞い”を空間 2 次元において考察する。

$$\begin{cases} (\partial_t + \alpha \cdot \nabla + iM\beta) \psi = \lambda \phi \beta \psi, \\ (\partial_t^2 - \Delta + m^2) \phi = \mu \psi^* \beta \psi, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \quad (\text{DKG})$$

$\psi = \psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \psi_2(t, x))^t \in \mathbf{C}^2$: スピノル場, $\phi = \phi(t, x) \in \mathbf{R}$: スカラー場. $M, m > 0$: スピノル場, スカラー場の質量. $\lambda \in \mathbf{C}, \mu \in \mathbf{R}$: 定数. $\psi^* = (\overline{\psi_1}(t, x), \overline{\psi_2}(t, x))$: ψ の転置共役ベクトル. $\alpha \cdot \nabla \equiv \sum_{j=1}^2 \alpha_j \partial_{x_j}$: 微分作用素. α_j ($j = 1, 2$), β : Dirac 行列^{def} 2×2 の各成分が定数のエルミート行列でかつ次の非交換関係を満たすものである:

$$\alpha_j^2 = \beta^2 = I, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = O \quad (j = 1, 2), \quad \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = O \quad (j, k = 1, 2, j \neq k).$$

I : 単位行列, O : 零行列.

講演の目的は「空間2次元」においてかつ非質量共鳴条件「 $m \neq 2M$ 」下、DKG 方程式系に対する波動作用素を低階のソボレフ空間上で定義することである。

DKG 方程式系に対する初期値問題の“大域解の存在”は Klein-Gordon(KG) 方程式系に直して考えることができる。実際 Dirac 方程式の両辺に $\mathcal{D}_{-,M} = \partial_t - (\alpha \cdot \nabla + iM\beta)$ を作用させると KG 方程式になる:

$$(\partial_t^2 - \Delta + M^2) \psi = \lambda \mathcal{D}_{-,M} (\phi \beta \psi) = \lambda ((\mathcal{D}_{-,M} \phi) \beta - iM\phi I + \lambda \phi^2 I) \psi$$

したがって DKG 方程式系の解は次の非線形 KG 方程式系の解にもなる:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + M^2) \psi = \lambda ((\mathcal{D}_{-,M} \phi) \beta - iM\phi I + \lambda \phi^2 I) \psi, \\ (\partial_t^2 - \Delta + m^2) \phi = \mu \psi^* \beta \psi, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2. \quad (1)$$

このことから DKG 方程式系に対する解のアプリオリ評価は導かれた KG 方程式系から得れば良い。しかし、重要な問題として「上の逆が成立しない」つまり「KG 方程式系の解と言っても、DKG 方程式系を満たすとは限らない」ことにある。このことから、「DKG 系の解の漸近挙動は KG 方程式系からすぐに従うものではない」。そこで「Klein-Gordon Operator の Dirac-Operator による分解を用いて」波動作用素の存在を比較的 low order のソボレフ空間の上で定義することができた。詳しくは [1] を参照。

参考文献

- [1] M. Ikeda, *Final state problem for the Dirac-Klein-Gordon equations in two space dimensions*, preprint.

本研究は科研費 (課題番号:232083) の助成を受けたものである。

キーワード: 非質量共鳴, 波動作用素

* e-mail: m-ikeda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Blow-up solution for the Zakharov system on 2D torus

岸本 展^{のぶ} (京都大学次世代研究者育成センター・大学院理学研究科数学教室)

本講演は前田昌也氏(東北大)との共同研究([3])に基づいたものである。以下に示す Zakharov 方程式を考える。

$$(Z) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = nu, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta n = \Delta(|u|^2).$$

ここで $u = u(t, x)$, $n = n(t, x)$ はそれぞれ複素数値, 実数値の未知関数, $i = \sqrt{-1}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする。非線形 Schrödinger 方程式と非線形波動方程式のシステムである Zakharov 方程式は, プラズマ中で電場 (u) とイオン密度 (n) の相互作用により‘泡’の生成・消滅が繰り返される‘Langmuir 乱流’と呼ばれる現象を記述するとされる。‘泡’が生成する過程で周囲の電場およびイオン密度変化は非常に大きくなることから, 本講演で扱う Zakharov 方程式の有限時間爆発現象は物理的にも意味のあるものと考えられる。

(Z) は未知関数 u の L^2 ノルム $\int |u(t)|^2 dx$ およびエネルギー

$$H(u, n)(t) := \int |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int \left(n(t)^2 + \left| |\nabla|^{-1} \frac{\partial n}{\partial t}(t) \right|^2 \right) dx + \int n(t) |u(t)|^2 dx$$

(右辺第3項が定義できるかはさておき) の2つの保存量を持つ。エネルギー空間 $u(t) \in H^1 := \{u \in L^2 \mid \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2, j = 1, \dots, d\}$, $n(t) \in L^2$, $|\nabla|^{-1} \frac{\partial n}{\partial t}(t) \in L^2$ における (Z) の初期値問題は, 空間領域が $x \in \mathbb{R}^d$ の場合には非常によく研究されており, 3次元以下なら時間局所解の存在と一意性および初期値に対する連続依存性(時間局所適切性)が知られている。また1次元では解は時間大域的に存在するが, 2次元では初期値 $u(0, x)$ の L^2 ノルムがある値を超えたとき有限時間で爆発する解が現れる([1])。3次元でも初期値が小さい場合を除けば有限時間爆発解の存在が予想されているが未解決である。

今回は $\mathbb{R}^d$ の次に扱いやすいトーラスの場合: $x \in \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$ (すべての空間軸方向に周期 2π をもつ空間周期的な解を考えるということ) の有限時間爆発解を構成する。エネルギー空間における時間局所適切性は現状2次元以下でしか示されていないが([4, 2]), 1次元では $\mathbb{R}$ のときと同様, エネルギー空間の解は大域的に延長できることが知られている。2次元の場合に以下のような結果を得た。

定理 1. ある定数 $M_0 > 0$ が存在し, エネルギー空間における $\mathbb{T}^2$ 上の (Z) の初期値問題に関して次が成り立つ。

- (1) 初期値 $u(0, x)$ の L^2 ノルムが M_0 以下であれば解は時間大域的に存在する。
- (2) 初期値 $u(0, x)$ の L^2 ノルムが M_0 にいくらでも近い有限時間爆発解が存在する。

参考文献

- [1] L. Glangetas, F. Merle; *Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two, I*, Comm. Math. Phys. **160** (1994), 173–215.
- [2] N. Kishimoto; *Local well-posedness for the Zakharov system on multidimensional torus*, preprint. arXiv:1109.3527
- [3] N. Kishimoto, M. Maeda; *Construction of blow-up solutions for Zakharov system on $\mathbb{T}^2$* , preprint. arXiv:1109.3528
- [4] H. Takaoka; *Well-posedness for the Zakharov system with the periodic boundary condition*, Differential Integral Equations **12** (1999), 789–810.

Well-posedness for the Kawahara equation with low regularity data

加藤 孝盛 (京都大学大学院理学研究科数学教室)

本講演では, 5 次 KdV 型の方程式である Kawahara 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^5 u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^2) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

この方程式は水面波を記述し, 孤立波解や多くの保存量をもつことが知られている. 本講演の目的は, より広い初期値の空間に対して時間大域的適切性 (GWP) を導くことである. 通常, 初期値は Sobolev 空間 H^s に与えるが, s が小さくなるほど非線型効果が強く現れ, その解析が難しくなる. 特に $s < 0$ の場合, たとえ時間局所解を構成できても保存則が成立しないため時間大域的に延長することは難しい. そこで高周波部分で減衰し, 極限が恒等的になるような作用素 I を解に施し, 修正エネルギーを定義する. そしてこの量の時間に関する増大度が小さいことを保証する擬保存則を導くことで GWP を得る. この手法は I-method とよばれ, Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao(2003) によって構築された. 本研究と密接な関連を持つ既存の結果として Chen-Guo(2009) が I-method を用いて $s \geq -7/4$ で GWP を示したものを挙げる. 我々はこの結果を拡張すること, つまり $s < -7/4$ で GWP を示すことを目標とした. 詳細に述べると Bourgain(1993) が提唱した Fourier 制限ノルム法により時間局所的適切性 (LWP) を示し, それを I-method によって時間大域的に延長する.

この種の問題において重要になるのは, 解を構成する関数空間を適当に設定することである. ここで有効に機能するのが Bourgain 空間 $X^{s,b}$ である. この空間は方程式のシンボルに依存するノルム, $\|u\|_{X^{s,b}} := \| \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^5 - \xi^3 \rangle^b \mathcal{F}_{t,x} u \|_{L^2_{\tau,\xi}}$, により定義される. ここで $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$ とした.. また Bourgain 空間を利用して LWP を証明する方法を Fourier 制限ノルム法という. この手法において鍵になるのは Fourier 空間における非線型項 $\partial_x(u^2)$ に対する次の評価である.

$$\|\partial_x(uv)\|_{X^{s,b-1}} \leq C \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{X^{s,b}}.$$

これは双線型評価と呼ばれる. しかし $s < -7/4$ ではこの評価が真に破綻してしまい, 時間局所解を構成することは難しい. そこで Bourgain 空間を非線型項の影響をより忠実に反映したものに修正する. この手法は Bejenaru-Tao(2006) により提唱されたが, 一般的な枠組みはなく個々の方程式に対してその修正は異なることを注意しておく. 双線型評価の反例を考察することで, 最も強い非線型相互作用は解の高周波同士の相互作用から低周波が生成される $high \times high \rightarrow low$ 相互作用であることがわかる. そして $s < -7/4$ において双線型評価を得るためには, $high \times high \rightarrow low$ 相互作用を制御できるように低周波部分 $\{|\xi| \leq 1\}$ において Bourgain ノルムを弱いものに修正する必要がある. しかしこのように修正した Bourgain 空間では通常のものより平滑化効果が弱くなるため, 擬保存則を得ることは難しくなる. そこで我々はある意味最良の $L^4_{t,x}$ 型の Stricartz 評価である次の bilinear refinement を構築することによりこの問題を解消し, $s \geq -38/21$ において双線型評価と擬保存則を両立させ GWP を導いた. ただし, この指数は適切と非適切な臨界である $s = -2$ とは差異があることを注意しておく.

Chern-Simons-Dirac 方程式の初期値問題の適切性について

岡本 葵

京都大学理学研究科数学教室 博士課程 1 年

Chern-Simons-Dirac 方程式の初期値問題

$$(CSD) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = -J^\mu, \\ i\gamma^\mu D_\mu\psi = m\psi, \\ \psi(0) = \psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^2), A_\mu(0) = a_\mu \in H^r(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

を考える．ここで、 $\psi: \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $A_\mu: \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり、 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $J^\mu = \langle \gamma^0 \gamma^\mu \psi, \psi \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^2$ における通常の内積、 $H^s(\mathbb{R}^2)$ は Sobolev 空間を表す．また、 m は非負定数、 $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ は完全反対称テンソル、 γ^μ は次のような 2 次の行列である；

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

計量は $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ であり、上下に現れる添え字に関しては和を取るものとし、添え字の上げ下げもこの計量を用いて行う．Chern-Simons-Dirac 方程式は、分数量子ホール効果や高温超電導等を記述する方程式として知られている．

(CSD) の $H^s \times H^r$ における (時間局所) 適切性とは、

$$\psi \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^2)), \quad A_\mu \in C([0, T]; H^r(\mathbb{R}^2))$$

のクラスに属する局所解の存在と (適当な意味での) 一意性、及び初期値に対する連続依存性を意味する．

Chern-Simons-Dirac 方程式は、ゲージ変換

$$(\psi, A_\mu) \rightarrow (e^{i\chi}\psi, A_\mu + \partial_\mu\chi)$$

により不変である．ここで、 χ は滑らかな実数値関数である．従って、ポテンシャルを固定するために Lorenz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$, Coulomb ゲージ $\partial_j A^j = 0$, テンポラルゲージ $A_0 \equiv 0$ といったゲージ条件を考える必要がある．考えるゲージ条件により、方程式の構造は変化する．例えば、Lorenz ゲージ条件を課した場合、ポテンシャルは $\square A^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu J_\rho$ を満たし、波動方程式現れるが、Coulomb ゲージの場合には $\Delta A_j = \epsilon_{ji} \partial_i J_0$ を満たし、先ほどのような波動方程式は現れず、Poisson 方程式が登場する．また、変換 $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対しても不変であり、Noether の原理により $\partial_\mu J^\mu = 0$ が成り立つ．このことから、電荷の保存則

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

が従う．また、初期値が $\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 = -|\psi_0|^2$ を満たせば、(CSD) の解 (ψ, A_μ) は常に $F_{12} = -J^0$ を満たすことも分かる．

今回は、どの程度小さな (s, r) に対して適切性が成り立つかを考える． $m = 0$ の場合、Chern-Simons-Dirac 方程式はスケーリング

$$\psi_\lambda(t, x) = \lambda^{-1}\psi(t/\lambda, x/\lambda), \quad A_{\mu,\lambda}(t, x) = \lambda^{-1}A_\mu(t/\lambda, x/\lambda)$$

により不変であるため、スケーリング不変な指数より小さい場合には適切ではないと予想される．空間 1 次元の場合には、Bournaveas, Candy, and Machihara [2] により、スケーリングの意味でほぼ最良の結果 $(s, r) = (-1/2+, -1/2+)$ が示されている．空間 1 次元の Chern-Simons-Dirac 方程式は Dirac 方程式の連立方程式に書き直すことが出来ることを用いて、 $(-1/2+, -1/2+)$ での適切性を示している．空間 2 次元の場合には、Huh [1] による結果 (例えば、Coulomb ゲージの場合に $H^{1/2+\varepsilon} \times L^{2/(1-2\varepsilon)}$ ($0 < \varepsilon < 1/2$) において適切) しか知られていない．本講演では、正則性がより低い場合における適切性について得られた結果を紹介する．

参考文献

- [1] H. Huh, Cauchy problem for the Fermion field equation coupled with the Chern-Simons gauge, Lett. Math. Phys., 2007, 79, 75–94.
- [2] N. Bournaveas, T. Candy, and S. Machihara, Local and global well-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension, preprint.

Local Behavior of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations

田部井 希一

京都大学大学院理学研究科 数学教室 修士 2 年

1 Abstract

本講演では, B.GIDAS AND J.SPRUCK の論文 [1] のうち, positive solution が特異点をもつ場合の局所的な結果について紹介する. 次の定理 1.1 が主定理である.

定理 1.1.

$$\Delta u + |x|^\gamma u^\alpha = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0, \infty\}, \quad n \geq 3$$

をみたす $u(x)$: positive C^2 -solution を考える. ここで,

$$1 < \frac{n+\gamma}{n-2} < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \quad -2 < \gamma < 2, \quad \alpha \neq \frac{n+2+2\gamma}{n-2}$$

とする. このとき, $u(x)$ の特異点 $x = 0, \infty$ が除去可能でないとすると,

$$u(x) = \frac{C}{|x|^{(2+\gamma)/(\alpha-1)}}, \quad C = \left\{ \frac{(2+\gamma)(n-2)}{(\alpha-1)^2} \left(\alpha - \frac{n+\gamma}{n-2} \right) \right\}^{1/(\alpha-1)}.$$

定理 1.1 は, 特異点に除去可能でないという条件を加えることで正值解が一意的に表せる, という点が興味深い. 解の一意的な表示の本質となっているのは, 次の定理である.

定理 1.2. M を境界をもたない 2 次元コンパクトリーマン多様体で, ガウス曲率を K として,

$$\Delta u - \lambda u + u^\alpha = 0 \quad \text{on } M$$

をみたす $u(x)$: positive $C^2(M)$ -solution を考える. ここで, $\lambda > 0$, $1 < \alpha < +\infty$, K の間には,

$$\exists \beta > 0; \quad \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \leq K, \quad 2 + \frac{2}{\beta} \geq \alpha$$

が成り立っているとする. このとき,

$$u(x) \equiv \lambda^{1/(\alpha-1)}.$$

定理 1.3. M を境界をもたない $d (\geq 3)$ 次元コンパクトリーマン多様体で, リーマン計量を g , リッチテンソルを R_{ij} とする.

$$\Delta u - \lambda u + u^\alpha = 0 \quad \text{on } M$$

をみたす $u(x)$: positive $C^2(M)$ -solution を考える. ここで, $\lambda > 0$, $1 < \alpha < (d+2)/(d-2)$, g_{ij} , R_{ij} の間には,

$$\exists \beta > 0; \quad \lambda \left\{ \frac{4(d-1)}{d(d-2)} - \beta \frac{d+2}{2d} \right\} g_{ij} \leq R_{ij}, \quad \beta \leq \min \left\{ \frac{2(d-1)}{d+2} \left(\frac{d+2}{d-2} - \alpha \right), 1 \right\}$$

が成り立っているとする. このとき,

$$u(x) \equiv \lambda^{1/(\alpha-1)}.$$

今回は, 定理 1.2, 定理 1.3 がどのように利用されるのかを含めて, 定理 1.1 の証明の概略をお話したいと思う.

参考文献

- [1] B.GIDAS, J.SPRUCK, Global and Local Behavior of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 34, 1981, pp.525-598

On fundamental solutions to fractional diffusion equations with divergence free drift

Yasunori Maekawa (Kobe University) joint work with Hideyuki Miura (Osaka University)

In this talk we consider the drift diffusion equations with the fractional Laplacian:

$$\partial_t \theta + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \theta + v \cdot \nabla \theta = 0, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

where $d \geq 2$, $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, and $(-\Delta)^{\alpha/2}$ is formally defined by

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f(x) = C_{d,\alpha} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} dy. \quad (2)$$

Here $\alpha \in (0, 2)$ and $C_{d,\alpha} > 0$, are constants and $v = v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_d(t, x))$ is a given solenoidal (i.e., $\nabla \cdot v = 0$) vector field in $\mathbb{R}^d$ with suitable regularity to be specified later. The equations of the form (1) appear in several models in the fluid dynamics, where the solution describes some active scalar convected by the incompressible flows.

In the case $d = 2$, if v and θ are related by $v = (R_2 \theta, -R_1 \theta)$, the equation (1) is called the dissipative quasi-geostrophic equation (QG). Here R_i ($i = 1, 2$) is the Riesz transform. In particular, the case $\alpha = 1$ is called critical in the sense that both the diffusion term and the drift term become the leading terms of the equation. The global regularity of the solution in the critical case is recently addressed in [4, 1, 3]. Due to the non-local character of the fractional Laplacian, the usual local regularity theory does not work and the nonsmooth drift term makes problems more delicate.

In [1, 3] they regarded (QG) as the diffusion equation with a given drift term in the BMO space. Motivated by these results, we study the existence, the Hölder regularity, and the decay estimates of fundamental solutions of (1) under weak regularity assumptions for v : we assume that $v \in X_\alpha^d$ or $v \in Y^d$, where

$$X_\alpha = \begin{cases} L^\infty(0, \infty; L^{\frac{d}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^d)) & \text{if } \alpha \in (1, 2), \\ L^\infty(0, \infty; BMO(\mathbb{R}^d)) \cap L_{loc}^q(0, \infty; L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)), & 1 < \exists q < \infty \quad \text{if } \alpha = 1, \\ L^\infty(0, \infty; \dot{C}^{1-\alpha}(\mathbb{R}^d)) \cap L_{loc}^q(0, \infty; L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)), & 1 < \exists q < \infty \quad \text{if } \alpha \in (0, 1), \end{cases}$$

$$Y = L^1(0, \infty; \text{Lip}(\mathbb{R}^d)) \cap L_{loc}^q(0, \infty; L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad 1 < \exists q < \infty.$$

Here $\dot{C}^{1-\alpha}(\mathbb{R}^d)$ is the homogeneous Hölder space with the order $1 - \alpha$. These regularity assumptions are invariant under the scaling $v(t, x) \mapsto \lambda^{\alpha-1} v(\lambda^\alpha t, \lambda x)$, which is compatible with the natural scaling of the equation (1).

In order to construct fundamental solutions, it is essential to show the a priori bounds related with the estimates in the theorem. To this end we will develop the Nash-type arguments in [2, 5] which studied the non-local diffusion equation without drift terms. As in [6, 5], the argument to derive the continuity estimates consists of four steps; the moment bound, the relative entropy bound, the overlap estimate, and the iteration estimate. Motivated by [1, 3], we estimate fundamental solutions in time-dependent coordinates along the trajectory determined by a local average of v . Our method can be adapted for more general non-local diffusion equations as in [5].

References

- [1] L. Caffarelli, and A. Vasseur, Ann. of Math. (2) **171** (2010) 1903-1930.
- [2] E. Carlen, S. Kusuoka and D.W. Stroock, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **23** (1987) 245-287.
- [3] A. Kiselev, F. Nazarov, Zap. Nauchn. Sem. POMI **370** (2010) 58-72.
- [4] A. Kiselev, F. Nazarov, and A. Volberg, Invent. Math. **167** (2007) 445-453.
- [5] T. Komatsu, Osaka J. Math. **32** (1995) 833-860.
- [6] J. Nash, Amer. J. Math. **80** (1958) 931-954.

Diffusion Processes in Thin Tubes and their Limits on Graphs

楠岡 誠一郎*

日本学術振興会特別研究員 P D

ユークリッド空間に埋め込まれたグラフ Γ を与え、その近傍から成る境界付き多様体を考える。そして、その多様体の中を動く拡散過程を与え、多様体を元のグラフに縮めたときの拡散過程の極限について考察する。この話題の背景には、血管が作る回路や神経回路といった物理現象をどのようにモデル化をするかということがある。このような細い管の中を物質が動く現象は、しばしばグラフ上の偏微分方程式によりモデル化される。これらは細い管から成る物体をグラフとして扱うことによって問題を簡素化している。そこで、この問題はこのような細い管の中を物質が動く現象をグラフ上の偏微分方程式で近似して良いのか、どのような方程式でモデル化するべきかを議論するものである。特に、グラフの頂点において、どのような境界条件を与えるのが自然であるかを考えるものである。

この問題は確率論だけでなく、解析学や幾何学においても考えられ、いろいろなアプローチにより研究されてきた。特に、管の縁に反射壁をおいた場合は関数解析的手法が非常に有効であり、沢山の結果がある。しかし、管の縁に吸収壁をおいた場合は反射壁の場合のような議論ができなく、関数解析的アプローチが困難であった。そこで、管の外に大きなポテンシャルを置き、管の中から粒子が脱出できないような場合を考え、確率論的アプローチにより極限の粒子の挙動を特徴づけることを考えたのがこの研究である。

n -次元ユークリッド空間に埋め込まれたグラフ Γ を考える。 Ω^ε を Γ の近傍で、 $\varepsilon \rightarrow 0$ において Γ に縮むような境界付き多様体の列とする。 U^ε を $\mathbb{R}^n$ 上のポテンシャル関数で、 ∇U^ε が作りだす作用が Ω^ε 上の拡散過程を Γ に押しつけるようなものとする。(厳密な設定は講演中に述べる。)

X^ε を次の確率微分方程式の解で定める。

$$X^\varepsilon(t) = X^\varepsilon(0) + \int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s)) dW(s) + \int_0^t b(X^\varepsilon(s)) ds - \int_0^t (\nabla U^\varepsilon)(X^\varepsilon(s)) ds$$

ただし、 $X^\varepsilon(0)$ は Ω^ε 値確率変数、 W は n 次元ブラウン運動、 $\sigma \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$, $b \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ とする。 2 階微分作用素 L を

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

とすると、この確率微分方程式の解は $(L - \langle \nabla U^\varepsilon, \nabla \rangle)$ の生成する $C_0(\Omega^\varepsilon)$ 上の半群に対応する。十分に良い条件の下では、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき X^ε の法則が Γ 上の拡散過程 X の法則に収束することを示すことができ、さらに X の法則を特徴付けることができる。この特徴付けは Γ 上の偏微分方程式を使って行う。

グラフの辺付近では、辺に垂直な成分がポテンシャルによりつぶされるだけで、辺に平行な成分だけ考えればよいことになり、さほど難しい議論は必要ではない。しかし、グラフの頂点付近では複雑なことが起きており、頂点付近での挙動を見ることが主な議論になる。それは、太らせた多様体では境界でなかった部分を、収束先のグラフ上の偏微分方程式を考えるとときには境界として扱うことになるからである。

証明には確率論的手法を用い、確率過程の挙動を詳細に見ることによって証明を行う。また、この手法は管の縁に反射壁をおいた場合についても同様の議論をすることができる。

講演では、問題背景、グラフの近傍から成る多様体の具体的な設定、拡散過程をグラフに押しつけるためのポテンシャル関数の具体的な設定と仮定、そして証明の概略について述べる。

参考文献

- [1] Sergio Albeverio and Seichiro Kusuoka, Diffusion Processes in Thin Tubes and their Limits on Graphs, Annals of Probability, to appear.

* e-mail: kusuoka@math.keio.ac.jp

Optimal control problem of portfolio with partial information :Hamilton-Jacobi-Bellman equation approach

Yoshitaka Hori

京都大学理学研究科数学教室 修士2年

1 Abstract

債権 (価格 B_t), 株 (価格過程 S_t), 外貨預金 (価格過程 θ_t) の3つの投資対象があるときの portfolio (π_1, π_2) の最適化を考える. それぞれ次の方程式を満たすとする.

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ dS_t = (\mu_t dt + \sigma dw_t^{(1)})S_t, & d\mu_t = \alpha_1 \mu_t dt + \alpha_2 dw_t^{(2)} \\ d\theta_t = (\beta_t dt + \delta dw_t^{(3)})\theta_t \end{cases}$$

ここで $w_t^{(\cdot)}$ はそれぞれ異なる標準 Brown 運動で, $w_t^{(1)}$ と $w_t^{(3)}$ は $w_t^{(2)}$ と互いに独立である. また $w_t^{(1)}$ と $w_t^{(3)}$ は相関係数が $\rho \in (-1, 1)$ だと仮定する. また r, μ_t, β_t はそれぞれの瞬間利率で, $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \delta$ は定数とする.

Title にもあるように, partial information とはまさに μ_t の部分に他ならない. すなわち株価は正確に観測できるが, その変動率は正確には測定できないものである. ゆえに上記のようなランダムさを考慮することは応用上重要である. 今資産 X_t があり, そのすべてが投資に使われるものとし, $\pi_1(t), \pi_2(t)$ をそれぞれ時刻 t での株と外貨預金への投資総額だとすると, X_t は次の確率微分方程式を満たす.

$$(SDE) \quad dX_t = [\pi_1(t)\mu_t + \pi_2(t)\beta_t + r(X_t - \pi_1(t) - \pi_2(t))]dt + \sigma\pi_1(t)dw_t^{(1)} + \delta\pi_2(t)dw_t^{(3)} \quad (0 \leq t \leq T)$$

目標はこの model 上で π_1, π_2 を適当に選ぶことにより (π_1, π_2 は主に可積分性などを持つ admissible という条件を満たす集合 Π に含まれる.), 最終資産 X_T の効用関数 $U(X_T)$ の期待値を最大化することである. ($U(x)$ は一般に $U'(x) > 0, U''(x) < 0$ を満たす.) つまり formulation は

$$\max E[U(X_T)] \quad s.t. \begin{cases} (\pi_1, \pi_2) \in \Pi \\ (X, \pi_1, \pi_2) \text{ satisfying } (SDE) \end{cases}$$

その最適期待効用を求める手法として非線形2階放物型である Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を用いるものがあり, 幅広く研究されている. ただこの手法は partial information のままだと適用できない. そこで Kalman-Bucy filtering を用いることにより, complete information に書き換えられ適用可能となる. このことに関しても幅広い研究がなされている. またその最適期待効用を初等関数で表すこと (初等関数の特殊解を見出すこと) は数値計算への応用を考える上で, 非常に重要なことである. 本講演では [1] や [3] では投資対象が2つ (債権と株) であったが, 上記の model のように投資対象が3つの状況を考え, 最適期待効用が初等関数で表示できる場合で具体的に計算した結果を紹介する. そして [1] や [3] との結果と比較しながら, 投資戦略の間にどのような関係があるのかを考察する.

参考文献

- [1] Bai, Lihua; Guo, Junyi "Utility maximization with partial information: Hamilton-Jacobi-Bellman equation approach." Front. Math. China 2 (2007), no. 4, 527–537
- [2] Xi, Yue; Luo, Chengxin "One kind of optimal control problem of portfolio and consumption choice with power utility function." Int. J. Pure Appl. Math. 66 (2011), no. 3, 331–337
- [3] Rishel, Raymond "Optimal portfolio management with partial observations and power utility function." Stochastic analysis, control, optimization and applications, 605–619, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999

Hilbert 空間上における確率偏微分方程式の解の強一意性について

京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数学系修士 2 回生 稲田哲生

次のような偏微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + b(u(t,x)) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ここで, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は Hölder 連続とする. この時, 一般には解の一意性が成り立たないことが知られている. ところが, この偏微分方程式に適切に “ノイズ” を入れることにより, b が Hölder 連続程度であれば解の一意性がある意味で復活する. そこで, 本講演では, 先ほどの例に “ノイズ” を入れたものを抽象的な枠組みでとらえ直すこととする. すなわち, Hilbert 空間 H 上で次のような確率偏微分方程式を考える.

$$(SRDE) \quad \begin{cases} dX_t = AX_t dt + B(t, X_t) dt + \sqrt{Q} dW_t \\ X_0 = x \in H \end{cases}$$

ただし,

W_t : cylindrical Brownian motion (この定義については, 講演にて触れる予定である)

$A: D(A) \subset H \rightarrow H$, A は C_0 半群 e^{tA} の生成作用素

$B: [0, T] \times H \rightarrow H$, $B \in C([0, T]; C(H, H))$

Q : 非負 selfadjoint bounded operator

とする. このような方程式は, stochastic reaction-diffusion 方程式と呼ばれる. (SRDE) の強解の存在については, [4] などにより知られている. さらに [1] により, ドリフト項 $B(t, x)$ が x に関して Hölder 連続であり, $\|x\|$ の十分大きい所でリプシッツ増大している場合について, 解の強一意性が示された. また, [4] などでは空間次元は 1 次元のみを扱っていたが, [1] により 2 次元で解の強一意性が復活する例も示された.

一意性の証明の概略を以下に述べる. まず Kolmogorov 方程式と伊藤の公式を使って, (SPDE) を B がいない形に式変形する. 伊藤の公式は, 微分積分の演算の確率版ともいえる公式である. Kolmogorov 方程式とは, 以下の方程式である. D_x を x 方向の微分とすると,

$$(Kol) \quad \begin{cases} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2} Tr(Q D_x^2 U(t,x)) + \langle Ax + B(t,x), D_x U(t,x) \rangle + G(t,x) \\ U(0,x) = 0 \end{cases}$$

次に, Kolmogorov 方程式の解の一階, 二階微分の評価式を使って一意性を示す. 特に, 二階微分の評価で, B の Hölder 連続性が効いている.

本講演では, 主に [1] の内容について講演し, 時間が許せば, B のクラスの拡張や, 主定理の十分条件の精密化についてもお話ししたい.

参考文献

- [1] G. Da Prato, F. Flandoli, *Pathwise uniqueness for a class of SDE in Hilbert spaces and applications*, J. Funct. Anal. 259(2010), no. 1, 243-267.
- [2] F. Flandoli, *Random Perturbation of PDEs and Fluid Dynamic Models*, Lecture Notes in Math., vol. 2015, Springer, Heidelberg, 2011.
- [3] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 293, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [4] I. Gyöngy, *Existence and uniqueness results for semilinear stochastic partial differential equations*, Stochastic Process. Appl. 73(1998), no. 2, 271-299.

安定レヴィ過程とその条件付け

矢野孝次 (京大理)*

分散有限な乱歩のスケール極限ではブラウン運動 B_t が現れ, それは

$$T_t f(x) = E_x[f(B_t)] \quad (1)$$

なる関係式によって熱半群 $T_t = e^{(\frac{1}{2}\Delta)t}$ と密接に結びついている. ここでブラウン運動は, ランダムに連続的な運動をする微粒子の軌跡を表しており, あらゆる経路にわたる平均として熱半群が得られることを (1) は主張している. 粒子の経路が時刻 $t_1 < \dots < t_n$ において集合 $C_1, \dots, C_n$ を通過する確率は, 期待値

$$E[1_{C_1}(B_{t_1}) \cdots 1_{C_n}(B_{t_n})] \quad (2)$$

で与えられる. さて, Feynman-Kac の公式によると, ポテンシャル $V(x)$ を持つ半群 $T_t^V = e^{(\frac{1}{2}\Delta - V)t}$ とブラウン運動とは, 適当な仮定の下で

$$T_t^V f(x) = E_x[f(B_t)e^{-A_t^V}] \quad (3)$$

を満たす. 但し, $A_t^V = \exp\left\{-\int_0^t V(B_s)ds\right\}$ とおいた. この場合, ポテンシャルなしの場合と異なり, 熱量が保存されず減少していくことに注意して, 時刻 t まで消滅しない条件の下での経路の確率は

$$\frac{E_x[1_{C_1}(B_{t_1}) \cdots 1_{C_n}(B_{t_n})e^{-A_t^V}]}{E_x[e^{-A_t^V}]} \quad (4)$$

で与えられる. ここで, $t \rightarrow \infty$ における (4) の極限に着目したい. それは, いつまでも粒子が消滅しないような条件付き確率を意味すると考えられる. この極限を調べる問題を **処罰問題 (penalisation problem)** と呼んでいる.

分散無限大な乱歩のスケール極限では安定レヴィ過程が現れ, 対応する半群は分数階ラプラシアンから生成される. 本講演では, ブラウン運動および安定レヴィ過程に対する処罰問題について紹介したい.

参考文献

- [1] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [2] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [3] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.

*web: <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kyano/>

2 次形式と相対エントロピー –量子力学を背景として–

岡村 和弥 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系 D1

KEYWORDS: 状態, Uhlmann 汎関数, 量子相対エントロピー, Born の公式

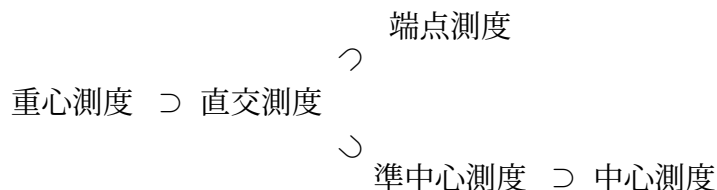
複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のように, 共役演算 $A \mapsto A^*$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の代数 ($*$ -代数) であって, 次を満たすノルム $\|\cdot\|$ に関して Banach 空間である $\mathfrak{A}$ を C^* -代数と呼ぶ: $A, B \in \mathfrak{A}$ に対し,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|A^*A\| = \|A\|^2, \quad \|A^*\| = \|A\|.$$

そして, C^* -代数 $\mathfrak{A}$ 上の規格化された正值線型汎関数 $\omega: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\mathfrak{A}$ 上の状態と呼ぶ。 $E_{\mathfrak{A}}$ で $\mathfrak{A}$ 上の状態全体を表す。 $E_{\mathfrak{A}}$ 上の任意の状態 ω に対し, 重心測度と呼ばれる $E_{\mathfrak{A}}$ 上の正則 Borel 測度 μ が存在して,

$$\omega(A) = \int_{E_{\mathfrak{A}}} \rho(A) d\mu(\rho)$$

と積分分解される [5]。ただし, この積分分解には一意性はない。重心測度には特別なクラスが存在して, 下の図で表されるような包含関係がある:



量子力学においては準中心測度というクラスが重要で, Born の公式は準中心測度によって導く形となる [1,2,3]。このとき, 状態に対する量子相対エントロピーができ, 測度論的な相対エントロピーと共通の性質を有する。量子相対エントロピーの定義には, 2 次形式の補間理論 [4] で中心的な, 2つのエルミート形式 α, β から定まる Uhlmann 汎関数 $QF_t(\alpha, \beta)(A, B)$ ($0 \leq t \leq 1, A, B \in \mathfrak{A}$) を利用する。また, 量子相対エントロピーが状態の重心測度に対する相対エントロピーと一致することが知られている [6]。

- [1] I. Ojima and K. Okamura, (2011), arXiv:quant-ph/1101.3690.
- [2] K. Okamura, in preparation.
- [3] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, in preparation.
- [4] A. Uhlmann, Commun. Math. Phys. **54** (1977), 21-32.
- [5] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics* vol.1 (Springer, 1979). (著者 (O. Bratteli) のサイトで pdf がとれる)
- [6] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

遠方での確率測度の級数展開について

長谷部高広

京都大学大学院理学研究科

まずコーシー分布

$$\mu_{a,b}(dx) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

に注目してみる. このフーリエ変換は

$$\mathcal{F}_{\mu_{a,b}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} \mu_{a,b}(dx) = e^{-b|z|+iaz}, \quad z \in \mathbb{R}$$

となる. 二つの性質に注目したい:

(i) もし $z > 0$ のみ考えれば, $\mathbb{C}$ 上で解析接続を持つ.

(ii) $c_1 e^{c_2|z|}$ の形の関数で上から評価される.

性質 (i), (ii) はどのような確率分布 μ に対して成り立つだろうか?

この問題について, 次の条件が必要十分であることを示す.

・ 正の数 C と $0 < r < R$ と実数列 $(a_n)_{n \geq 2}$ が存在して, $|a_n| \leq Cr^n$ を満たし, かつ

$$\mu(dx)|_{|x| \geq R} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} dx.$$

つまり遠方で確率測度が級数展開をもつということである.

またスチルチェス変換

$$G_{\mu_{a,b}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_{a,b}(dx)}{z-x}$$

についても類似の問題を考える.

以上の問題はコーシー分布を含む一般の安定分布に対しても考えることができるので, 時間があればそちらにも触れる.

有限型 Polish 群について

安藤浩志

京都大学大学院理学研究科 数理解析研究所 博士後期課程 3 年
Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen
E-mail: andonuts@kurims.kyoto-u.ac.jp

November 24, 2011

今回の話は 1 昨年から続けている北海道大学の松澤泰道君 (彼は今年 6 月学位を取りました) との共同研究 ([1]) に基きます。我々は論文 [2] で、次のような定理を示しました:

Theorem 1. M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有限 von Neumann 環とする。このとき、ユニタリ群 $\mathcal{U}(M)$ の強閉部分群 G は次のような $\mathcal{H}$ 歪自己共役作用素からなる完備位相 Lie 環を持つ:

$$\mathfrak{g} = \{A^* = -A \text{ on } \mathcal{H}; e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

ここで、位相は強レゾルベント収束位相を考える。特に和と Lie 括弧積は *well-defined* で連続。

このようにある $\mathcal{U}(M)$ に埋蔵可能な Polish 群 (以下 M に可分性を仮定し Polish 群のみ考察) は Sorin Popa [3] によって有限型 Polish 群と呼ばれ、cocycle superrigidity 理論の観点から注目される対象となっています。しかしどのような群が有限型 Polish 群であるかを判定するのは容易ではなく、その有用な特徴付けを探す事、また自明でない例を探す事が重要となります。我々は群上の正定値関数に注目し、以下の様な判定条件を得ました:

Theorem 2. G を Polish 群とする。以下は同値。

- (1) G は有限型。
- (2) G 上に共役不変な正定値関数 f で、単位元 e の近傍系を生成するものが存在。
- (3) G 上に共役不変な正定値関数 f で、任意の e を含まない G の閉集合 A について $\sup_{g \in A} |f(g)| < f(e)$ が成立。

なお、Popa, Haagerup-Winslow の定理によって G が有限型ならばより強く G は可分 II_1 型因子環のユニタリ群に埋蔵可能です。この判定条件を用いて複数の非局所コンパクトな有限型 Polish 群を構成する事ができます。有限型 Polish 群にはトレースから誘導される両側不変距離が存在します。両側不変距離の存在 (及びユニタリ群 $\mathcal{U}(\ell^2)$ への埋蔵可能性) が有限型であるための必要十分条件であるかという Popa の問いについても、いくつかのクラス (局所コンパクト群、amenable 群) で肯定的である事を説明します。また無限型因子環のユニタリ群についても時間があれば言及したいと思います。

References

- [1] H. Ando, Y. Matsuzawa, On Polish Groups of Finite Type, to appear in *Publ. RIMS*.
- [2] H. Ando, Y. Matsuzawa, Lie Group-Lie Algebra Correspondences of Unitary Groups in Finite von Neuman Algebras, to appear in *Hokkaido Math. J.*
- [3] S. Popa, Cocycle and orbit equivalence super-rigidity for malleable actions of w -rigid groups, *Invent. Math.* **170** (2007), 243–295.