量子推定理論の再編成と新展開

岡村　和弥　　京都大学大学院理学研究科数学教室 M2

KEYWORDS: Bayes 予測状態, モデル選択, 大偏差原理, くりこみ

量子推定理論は 1960 年代後半に C.W. Helstrom によって始められて現在まで発展している。量子推定理論の議論は，パラメータ推定に最適な測定の数学的表現である正作用素値測度 (POVM) の存在証明と具体的構成，状態識別に関する仮説検定 (Stein の補題の量子版等) と量子情報幾何における状態空間に導入される計量と Cramér-Rao 不等式の関係等をこれまで主体としていた。ただし，古典的・測度論的な場合の解釈との整合性に疑問が払拭できない構成が一部にあり，統計学・物理学両サイドから見たときの理論整備の不十分な点と扱われている。一方で，現代統計学の多様な方法論が生かされるような理論構成をしておらず，古典的・測度論的な場合とは比較にならないほど推定技術では劣っている。

しかし，小嶋泉先生 (数理研) との共同研究により [1]，殆どの量子系で古典的・測度論的な方法を利用することが可能となり，例外があるものの古典的・測度論的な場合と遜色なくなった。これまでの量子推定理論は，量子論は非可換性が入り込む Hilbert 空間上の作用素で記述されるので，これに対応した古典的・測度論的でない方法論を開発しなければならないという強迫観念に襲われていた経緯があった。更には議論の簡略化のために有限次元 Hilbert 空間での議論が中心になり，量子情報理論ブーム以前の主流であった C^*-環や von Neumann 環での議論が減少したことによって測度論的な記述との結びつきが忘れ去られてしまい，セクター理論と結びつかなかったことが原因となっている。それ故に見過ごされていた手法である。議論の骨格は非常に簡単で，

レート関数 (大偏差原理 [2])$\Rightarrow$ 予測状態 $\Rightarrow$ 情報量規準

の順に従う。大偏差原理では測定量から推定される量と“ 真の ”量の間の乖離度を表すのがレート関数であり，その代表例が相対エントロピーである。次に，予測状態とは測定量とパラメータ付きのモデルを利用して得られる対象の状態を意味する。この予測状態の“ 真の ”状態の推定量としての良さをレート関数により評価したいのだが,“ 真の ”状態は推定されるものであって事後的に構成されるものである。そこでレート関数による予測状態と“ 真の ”状態の乖離度の推定量として情報量規準が登場する。本発表では量子推定理論の文脈でこの議論を行うので以下のような概念の適用が基本となる。

量子相対エントロピー $\Rightarrow$Bayes エスコート予測状態 $\Rightarrow$WAIC

核心はセクター理論の下で中心測度 [3,4] を利用することで量子相対エントロピーがレート関数としての意味を持ち，学習理論 [5] 等の現代統計学の成果を前面に押し出して解析できることにある。

[1] I. Ojima and K. Okamura, in preparation.

[2] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* 2nd eds. (Springer, 1997).

[3] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics* vol.1 (Springer, 1979).

[4] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

[5] S. Watanabe, *Algebraic geometry and statistical learning theory*, (Cambridge University Press, 2009).