白浜研究集会プログラム

11 月 29 日（月）
15:00〜15:35 今城 洋亮
Calibrate された部分多様体の円環への収束
15:45〜16:20 金子 元
代数的無理数の b 進展開表示について
16:30〜17:05 岡村 和弥
量子推定理論の再編成と新展開
17:15〜17:50 白石 大典
Collisions of random walks on the random walk trace

11 月 30 日（火）
9:00〜9:35 梶野 直孝
On-diagonal oscillation of the heat kernel on nested fractals
9:45〜10:20 嶽村 智子
斜積拡散過程の再帰性について
10:30〜11:05 長谷部 高広
可換及び非可換な確率論におけるレヴィ過程の分布について
11:15〜11:25(SC) 稲田 哲生
伊藤積分と伊藤の公式について
11:25〜11:35(SC) 堀 由昂
確率微分方程式の解の存在と一意性 Kalman-Bucy フィルターへの応用
11:35〜13:30
lunch
13:30〜14:05 友枝 恭子
5 次変形 KdV 方程式の時空間解析解の存在及び平滑化効果について
14:15〜14:50 岡本 葵
一次元 Maxwell-Dirac 方程式の局所適切性
15:00〜15:35 前田 昌也
Stability of bound states for Hamiltonian PDE
15:55〜16:05(SC) 山崎 陽平
半線型 Klein-Gordon 方程式の安定性
16:15〜16:50 廣瀬 三平
微分方程式の大域的解析と完全 WKB 解析
17:00〜17:35 中川 勇人
放物型 Hardy 空間について

12 月 1 日（水）
9:00〜9:35 岸本 展
Local well-posedness for the Zakharov system on torus
9:45〜10:20 池田 正弘
空間 1 次元における 3 次の非線形項を持つシュレディンガー型方程式に対する
散乱状態の非存在について
10:30〜11:05 若杉 勇太
摂動された波動方程式の解のエネルギー評価について

11:15〜11:25(SC) 田部井 希一
2 階楕円型偏微分方程式の弱解の存在
11:25〜11:35(SC) 眞鍋 秀悟
GPU を用いた多倍長数値計算環境の設計と実装
11:35〜13:30
lunch
13:30〜14:05 和田 尚樹
波動の境界観測を用いたグラフ構造の特徴づけについて
14:15〜14:50 田中 大毅
An estimate for perturbation of the attenuation coefficient and the scattering kernel in the transport equation
15:00〜15:35 松江 要
放物型発展方程式の定常解の数値検証法- 存在・局所一意性・双曲性-
15:45〜16:20 Zhong Sijia
Global existence of solutions to Schrödinger equations on compact Riemannian manifolds below H^1

12 月 2 日（木）
9:00〜9:35 木下 武彦
楕円型偏微分方程式の解の数値的検証法について
9:45〜10:20 多羅間 大輔
Stability Analysis for a Class of Equilibria of the Free Rigid Body on $\mathfrak{so}(n)$
10:30〜11:05 桂 幸納
定常状態輸送方程式の数値解法について
11:15〜11:50 三木 啓司
離散可積分系と固有値問題

Calibrate された部分多様体の円環への収束

今城洋亮 (京都大学 D1)

n を自然数とし，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を考える．m を自然数，$m \leq n$ とし，$\phi : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{m} \to \mathbb{R}$ を歪対称 m 重線型形式とする．ϕ は $\sup\{\phi(v_1, \ldots, v_m) | v_1, \ldots, v_m \text{は} \mathbb{R}^n \text{の正規直交系をなす}\} = 1$ を満たすと仮定する．

定義 (Harvey and Lawson [1])**.** $M \subset \mathbb{R}^n$ を向き付けられた m 次元部分多様体とする．M が ϕ に関して calibrate されているとは M の各点 P において接空間 $T_P M$ の任意の基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ が $\phi(v_1, \ldots, v_m) = 1$ を満たすことをいう．

定理 (Harvey and Lawson [1])**.** M が ϕ に関して calibrate されているならば，M は極小部分多様体である．

原点を中心とする半径 r の開球を $B(r)$ と表す．$0 < a < b$ なる実数 a, b に対して領域 $A(a, b)$ を $A(a.b) = B(b) - \overline{B(a)}$ と定める．ϕ に関して calibrate された m 次元閉部分多様体 $M \subset A(a, b)$ が与えられたとする．そのとき，Hofer [2, pp 534–539] が擬正則曲線の bubble off を制御するために導入したエネルギーの一般化として，M の ‘エネルギー’ が定義される [3].

定理 ([3]Theorem 6.2)**.** $S \subset \mathbb{R}^n$ を m 次線型部分空間とし，S は ϕ に関して calibrate されていると仮定する．a, b, c を $0 < a < c < b$ なる実数とし，ϵ を $0 < \epsilon < b - c$ なる実数とする．そのとき，ある正の実数 δ が存在して以下が成り立つ：$M \subset A(a, b)$ を ϕ に関して calibrate された m 次元閉部分多様体とする．M の ‘エネルギー’ は δ より小さいと仮定する．また，$M \cap A(b - \epsilon, b)$ はある函数 $u_\epsilon : S \cap A(b - \epsilon, b) \to S^\perp$ のグラフとして表され，しかも u_ϵ の C^1 ノルムは δ より小さいと仮定する．そのとき，$u|_{S \cap A(b-\epsilon, b)} = u_\epsilon$ を満たす函数 $u : S \cap A(c, b) \to S^\perp$ が存在して $M \cap A(c, b)$ は u のグラフに一致する．

上記の定理は Simon による補題 [4, Lemma 3, p 561] の類似物である．

参考文献

[1] R. Harvey and H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Mathematica **148** (1982), 47–157.

[2] H. Hofer, *Psedoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Inventions mathematicae **114** (1993), 515–563

[3] 今城　洋亮, **円環に収束するスペシャルラグランジュ部分多様体**, 京都大学 2009 年度修士論文.

[4] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linearevolution equations, with applications to geometric problems*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol.118, No.3(Nov, 1983), 529–571

代数的無理数のb進展開表示について

金子 元（京都大学理学研究科数学教室）

b を 2 以上の自然数とするとき、正の数の b 進展開を考える。b 進展開において、digit は 0 から $b-1$ までの数字をとりうる。本講演では、特に具体的に与えられた数の b 進展開の digit がどのような分布をとるかについて考察する。全ての有理数の b 進展開は周期的であることがよく知られており、具体的に与えられた有理数の b 進展開を求めることも容易である。一方、代数的無理数の b 進展開についてはほとんど何も知られていない。例えば、$\sqrt{2}$ の 10 進展開 $1.4142\ldots$ において、digit に 0 から 9 までの数字が一様に現れると予想されている。ところが、$\sqrt{2}$ の 10 進展開における digit に 1 が無限に多く現れるかどうかについてさえもいまだに知られていない。より一般に Borel によって、任意の b 進展開についての予想がなされた。すなわち、全ての代数的無理数は b 進展開における digit に 0 から $b-1$ までの数字が一様に出現すると予想されているが、やはり未解決である。

Bugeaud[1] は代数的無理数の b 進展開において digit がどのような頻度で変化するかを研究対象とすることを提唱した。digit の変化回数が多いということは、digit が一様であるということのひとつの証拠になるため、Bugeaud は digit の変化回数について下からの評価式を与えた。この下からの評価式は [2, 3] により改良された。[1, 2] では有理近似と呼ばれる解析数論の手法を用いて下からの評価式が導かれている。一方、[3] では、ある種の凸性評価式を考えることで、[1, 2] の結果を改良することができた。[3] による手法は、[1, 2] よりもよい評価を得ることができる代わり、適用される代数的数が限定される。[3] は 2 進展開に関する論文であるが、任意の b 進展開に関する定理に拡張できたので、本講演でその結果を紹介する。

参考文献

[1] Y. Bugeaud, On the b-ary expansion of an algebraic number, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **118** (2007), 217-233.

[2] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, On two notions of complexity of algebraic numbers, Acta Arith. **133** (2008), 221-250.

[3] H. Kaneko, On the binary digits of algebraic numbers, J. Aust. Math. Soc. to appear.

量子推定理論の再編成と新展開

岡村　和弥　　京都大学大学院理学研究科数学教室 M2

KEYWORDS: Bayes 予測状態, モデル選択, 大偏差原理, くりこみ

量子推定理論は 1960 年代後半に C.W. Helstrom によって始められて現在まで発展している。量子推定理論の議論は，パラメータ推定に最適な測定の数学的表現である正作用素値測度 (POVM) の存在証明と具体的構成，状態識別に関する仮説検定 (Stein の補題の量子版等) と量子情報幾何における状態空間に導入される計量と Cramér-Rao 不等式の関係等をこれまで主体としていた。ただし，古典的・測度論的な場合の解釈との整合性に疑問が払拭できない構成が一部にあり，統計学・物理学両サイドから見たときの理論整備の不十分な点と扱われている。一方で，現代統計学の多様な方法論が生かされるような理論構成をしておらず，古典的・測度論的な場合とは比較にならないほど推定技術では劣っている。

しかし，小嶋泉先生 (数理研) との共同研究により [1]，殆どの量子系で古典的・測度論的な方法を利用することが可能となり，例外があるものの古典的・測度論的な場合と遜色なくなった。これまでの量子推定理論は，量子論は非可換性が入り込む Hilbert 空間上の作用素で記述されるので，これに対応した古典的・測度論的でない方法論を開発しなければならないという強迫観念に襲われていた経緯があった。更には議論の簡略化のために有限次元 Hilbert 空間での議論が中心になり，量子情報理論ブーム以前の主流であった C^*-環や von Neumann 環での議論が減少したことによって測度論的な記述との結びつきが忘れ去られてしまい，セクター理論と結びつかなかったことが原因となっている。それ故に見過ごされていた手法である。議論の骨格は非常に簡単で，

レート関数 (大偏差原理 [2])⇒ 予測状態 ⇒ 情報量規準

の順に従う。大偏差原理では測定量から推定される量と“ 真の ”量の間の乖離度を表すのがレート関数であり，その代表例が相対エントロピーである。次に，予測状態とは測定量とパラメータ付きのモデルを利用して得られる対象の状態を意味する。この予測状態の“ 真の ”状態の推定量としての良さをレート関数により評価したいのだが,“ 真の ”状態は推定されるものであって事後的に構成されるものである。そこでレート関数による予測状態と“ 真の ”状態の乖離度の推定量として情報量規準が登場する。本発表では量子推定理論の文脈でこの議論を行うので以下のような概念の適用が基本となる。

量子相対エントロピー ⇒Bayes エスコート予測状態 ⇒WAIC

核心はセクター理論の下で中心測度 [3,4] を利用することで量子相対エントロピーがレート関数としての意味を持ち，学習理論 [5] 等の現代統計学の成果を前面に押し出して解析できることにある。

[1] I. Ojima and K. Okamura, in preparation.

[2] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* 2nd eds. (Springer, 1997).

[3] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics* vol.1 (Springer, 1979).

[4] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

[5] S. Watanabe, *Algebraic geometry and statistical learning theory*, (Cambridge University Press, 2009).

Collisions of random walks on the random walk trace

白石大典

Kyoto University(RIMS)

Abstract

$G = (V(G), E(G))$ を locally finite な連結無限グラフとする。G の再帰性を調べることは確率論において非常に重要な問題である。それはある意味で G の広さを考察していることに対応する。本講演では、再帰性とは別の G の大きさの解釈の仕方を述べる。S^1, S^2 を 0 から出発する G 上のふたつの独立なシンプルランダムウォーク (SRW) とする。両者の衝突回数を

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{S_n^1 = S_n^2\}$$

により定義する。$P^{a,b}$ により、$a, b \in V(G)$ から S^1, S^2 が出発するときの (S^1, S^2) の確率法則を表わすものとする。G が finite collision property を持つとは、

$$P^{a,a}(Z < \infty) = 1 \quad \text{for all } a \in V(G)$$

と定義し、G が infinite collision property を持つとは、

$$P^{a,a}(Z = \infty) = 1 \quad \text{for all } a \in V(G)$$

と定義する。[1] によれば、再帰的なグラフ上で衝突が無限回起こるかどうかという性質には、0-1 法則が成立して、いかなる再帰的なグラフ G に対しても、G は finite collision property を持つか、あるいは infinite collision property を持つかのいずれかが成り立つ。

G を非再帰的なグラフとする。このとき G 上で SRW を考え、RW が通った部分をグラフとして考えた時、そのトレースは確率 1 で再帰的なグラフになることが知られている ([2])。こうして得られるランダムウォークトレースの上でふたつの SRW を考えた時、両者は無限回衝突するか？という問題が未解決問題として [1] に提起されている。本講演では、G が $\mathbb{Z}^d$ で $d \geq 4$ のとき、ランダムウォークトレースは（確率 1 で）infinite collision property を持つことを報告する。時間が許せば、infinite collision property には包含関係による単調性が成り立たないや、infinite collision property がおこるための十分条件についても言及したい。

References

[1] Martin T. Barlow; Yuval Peres; Perla Sousi. : Collisions of Random Walks. preprint

[2] I. Benjamini, O. Gurel-Gurevich and R. Lyons. : Recurrence of random walk traces. Ann. Probab. 35 (2007) 732-738.

On-diagonal oscillation of the heat kernel on nested fractals

Naotaka Kajino* (Kyoto University)

It is a general belief that heat kernels on fractals exhibit highly oscillatory behaviors as opposed to the classical case of Riemannian manifolds. In this talk, we establish an oscillation of $p_t(x,x)$ as a function in t, where $p_t(x,y)$ denotes the canonical heat kernel on a given fractal.

More precisely, Let $K \subset \mathbb{R}^D$ be a *nested fractal*, e.g. any one of the examples shown below in Figure 1. It is known that there exists a canonical diffusion process, so-called the *Brownian motion*, on K, and it admits a continuous transition density (heat kernel) $p_t(x,y)$ (with respect to the self-similar measure with uniform weight). Moreover, Kumagai [*Probab. Theory Related Fields* **96** (1993), 205–224] has proved the following *sub-Gaussian estimate*

$$c_1 t^{-d_s/2} \exp\left(-\left(\frac{d(x,y)^{d_w}}{c_1 t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right) \le p_t(x,y) \le c_2 t^{-d_s/2} \exp\left(-\left(\frac{d(x,y)^{d_w}}{c_2 t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right) \tag{1}$$

for $t \in (0,1]$; here d is a suitably defined geodesic metric on K, $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ are some constants, and $d_s \in (0,2)$ and $d_w \in (2,\infty)$ are called the *spectral dimension* and the *walk dimension of* K, respectively. In particular, for any $x \in K$ we have

$$c_1 \le t^{d_s/2} p_t(x,x) \le c_2, \qquad t \in (0,1]. \tag{2}$$

Then it is natural to ask whether the limit

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{d_s/2} p_t(x,x) \tag{3}$$

exists or not. The main theorem of this talk asserts that this limit does not exist for *"generic"* points $x \in K$ and, in the cases of examples in Figure 1, for ***any*** $x \in K$.

We need some definitions to state precisely the main theorem of this talk. Let $\{F_i\}_{i \in S}$ be the family of contraction maps defining our fractal K, and let $\pi : S^{\mathbb{N}} \to K$ be the canonical projection, which is defined by $\{\pi(\omega_1\omega_2\omega_3\dots)\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{\omega_1} \circ \dots \circ F_{\omega_m}(K)$. Let $\sigma : S^{\mathbb{N}} \to S^{\mathbb{N}}$ be the usual shift operator given by $\sigma(\omega_1\omega_2\dots) := \omega_2\omega_3\dots$. For $x, y \in \mathbb{R}^D$ with $x \ne y$, let $g_{xy} : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ be the reflection in the hyperplane $H_{xy} := \{z \in \mathbb{R}^D \mid |z-x| = |z-y|\}$. We define

$$\mathcal{S} := \{z \in K \mid g_{x_1y_1} g_{x_2y_2} \dots g_{x_{2n-1}y_{2n-1}}(z) = z \text{ for some } n \in \mathbb{N} \text{ and } x_i, y_i \in V_0,\ x_i \ne y_i\}, \tag{4}$$

$$\mathcal{S}_* := \{z \in K \mid \lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}(\pi(\sigma^m(\omega)), \mathcal{S}) = 0 \text{ for any } \omega \in \pi^{-1}(z)\}. \tag{5}$$

Note that $\operatorname{int}_K \mathcal{S} = \emptyset$ and that, by a version of Borel-Cantelli lemma, $\nu \circ \pi^{-1}(\mathcal{S}_*) = 0$ whenever ν is a σ-ergodic Borel probability measure on $S^{\mathbb{N}}$ with $\nu \circ \pi^{-1}(\mathcal{S}) < 1$.

Theorem 1 (K.) *Let V_0 be the set of boundary points of our nested fractal K (marked by solid circles in Figure 1). Let $V_m := \bigcup_{i \in S} F_i(V_{m-1})$ for $m \in \mathbb{N}$, inductively, and let $V_* := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$.*
(i) *Assume $\#V_0 \ge 3$ (, so that $V_* \subset \mathcal{S}_*$). Then the limit* (3) *does not exist for any $x \in K \setminus \mathcal{S}_*$. If in addition the limit* (3) *does not exist for any $\mathcal{S} \setminus V_0$, then neither does it for any $x \in K \setminus V_*$.*
(ii) *The limit* (3) *does not exist for any $x \in K$ when K is any one of the examples in Figure* 1 *(or more generally, when K is the N-polygasket with $N \ge 3$* ***odd****).*

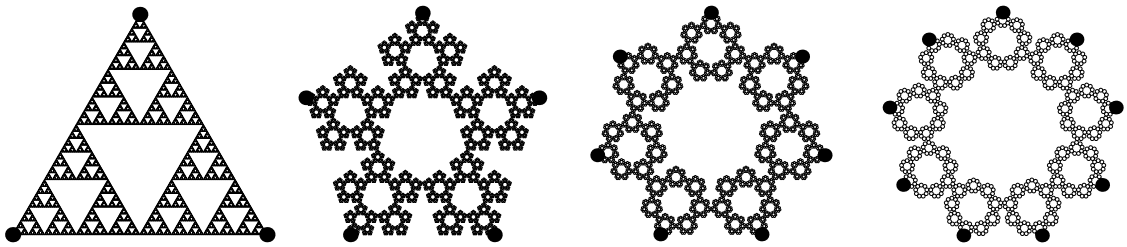

Figure 1: *N-polygaskets, $N = 3, 5, 7, 9$. Sierpinski gasket, pentagasket, heptagasket, nonagasket.*

*JSPS Research Fellow PD (20·6088): Supported by the Japan Society for the Promotion of Science.

斜積拡散過程の再帰性について

嶽村　智子　(奈良女子大学　数学教室)*

一次元拡散過程と球面上のブラウン運動との斜積を取り扱う. この斜積拡散過程とその時間変更過程の再帰性について得られた結果を述べる.

1. 斜積拡散過程とその時間変更過程

開区間 $I=(l_1,l_2)$ 上の狭義増大連続関数 s と右連続な非減少関数 m を尺度関数, スピード測度としてもつ一次元拡散過程を $\mathrm{R}=[R_t,P_r^{\mathrm{R}}]$ とする. $\mathrm{supp}[m]=I$ を仮定する. 次で与えられる R と球面上ブラウン運動 $\Theta=[\Theta_t,P_\theta^{\Theta}]$ との斜積拡散過程 X を考える.

$$\mathrm{X}=[X_t=(R_t,\Theta_{\mathbf{f}(t)}),P^{\mathrm{X}}_{(r,\theta)}=P_r^{\mathrm{R}}\otimes P_\theta^{\Theta},\ (r,\theta)\in I\times S^{d-1}]$$

ここで, $\mathbf{f}(t)=\int_I l^{\mathrm{R}}(t,r)\,d\nu(r)$, $l^{\mathrm{R}}(t,r)$ は R の局所時間, ν は I 上のラドン測度で $\mathrm{supp}[\nu]=I$ を満たすものとする. S^{d-1} 上の測度 $dm^{(2)}_{d-1}$ を次のように定義する. $dm^{(1)}_d(\varphi)=(\sin\varphi)^d\,d\varphi$ $(d\geq 1)$ は $(0,\pi)$ 上の測度, $dm^{(2)}_1(\theta)=d\theta$ は S^1 上の測度であり, $m^{(2)}_d=m^{(1)}_{d-1}\otimes m^{(2)}_{d-1}$ とおく.

次に X の R による時間変更過程を考える.

$$\mathrm{Y}=[Y_t=(R_{\tau(t)},\Theta_{\mathbf{f}(\tau(t))}),P^{\mathrm{Y}}_{(r,\theta)}=P_r^{\mathrm{R}}\otimes P_\theta^{\Theta},\ (r,\theta)\in I\times S^{d-1}].$$

ここで $\tau(t)$ は, 次の正値連続加法的汎関数の t に関する右連続な逆関数とする.

$$\mathbf{g}(t)=\int_I l^{\mathrm{R}}(t,r)\,d\mu(r),\quad t>0.$$

μ は, ラドン測度で $\mathrm{supp}[\nu]\subset I$ を満たすものとする. 必ずしも $\mathrm{supp}[\nu]=I$ を満たすとは限らないので, この時間変更過程は, 境界上でジャンプや消滅が現れるものも含んでいる.

$\mathrm{Z}=\mathrm{X},\ \mathrm{Y}$ に対して次の定理が成り立つ.

定理 2 斜積拡散過程 Z が再帰的であることと一次元拡散過程 R が再帰的であることは同値である. 従って, これは R の尺度関数 $s(x)$ に対して次式が成り立つことと同値である.

$$s(l_1)=-\infty,\quad s(l_2)=\infty.$$

参考文献

[1] M. Fukushima and Y. Oshima: *On the skew product of symmetric diffusion processes*, Forum Math.**1** (1989), 103–142.

[2] H. Ôkura: *Recurrence criteria for skew products of symmetric Markov processes*, Forum Math.**1** (1989), 331–357.

* e-mail: `cat.takemura@cc.nara-wu.ac.jp`

可換及び非可換な確率論におけるレヴィ過程の分布について

長谷部高広

概要

非可換な代数での確率論は、量子力学の基礎を定式化する上で自然に出てくるが、数学的な興味からの研究も多い。基本となる設定は、$\mathbb{C}$ 上の $*$-代数とその上の状態の組である。状態とは正の線形汎関数のことである。代数は確率空間あるいは σ-加法族の一般化であり、状態は期待値の一般化である。

作用素環の問題と関連して、1980 年代中ごろに Voiculescu は自由確率論を考案した。自由群から作られる群環の研究に応用するのが目的だった。この理論は非可換確率論の一種であるが、通常用いられる「独立性」を「自由独立性」というもので置き換えることによって得られる確率論である。このように非可換代数では、他の独立性と言うべきものが存在する。良い性質を満たす「独立性」は、通常のものと自由独立性のほかに、村木による「単調独立性」、Speicher、Woroudi の「ブール独立性」の 4 種類に限られることが村木によって証明されている。

非可換確率論は、確率論の基礎を見直すきっかけとしても興味深い。確率論の理論構成は、ほとんどの場合、暗黙のうちに「独立性」に基づいている。ところが非可換代数を考えると、ほかにも独立性の可能性が出てくる。そこで独立性を取り換えて確率論を構成してみると、独立性が理論の中で果たす役割がはっきりしてくる。もちろんこれは数学で基本的な研究手法である。つまり、ある特殊なものを一般化したとき、その一般化した視点から改めてもとのものを眺めてみれば、より深く理解できることがよくある。

この講演では、独立性それぞれについて定義される Lévy 過程を考えて、その確率分布について比較する。特に面白い現象を 2 つ挙げる。まず自由独立性を除くほかの 3 つにおいて、分布が正の実軸に集中しているようなものの特徴づけが完全に一致することである。もうひとつはコーシー分布である。コーシー分布はどの独立性においても指数 1 の安定分布になるという性質を持つ。これはなぜかというと、一言で言えば、コーシー分布が「デルタ関数」のように振舞うからである。詳しくは講演で説明したい。

伊藤積分と伊藤の公式について

京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数学系修士 1 回生　稲田哲生

1 次元 Brown 運動 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ とは, 以下の性質を満たす実数値確率変数である.

(a)$t_0 < t_1 < \cdots < t_n, B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$が独立

(b)$s, t \geq 0, P(B_{s+t} - B_s \in F) = \int_F (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{2t})dx$

(c)$t \mapsto B_t$は連続 a.s.

Brown 運動を使って, 実数上の積分と同様に, 確率積分"$\int f dB_s$"を定義したい. ところが,Brown 運動は任意の有界区間で有界変動ではなく, この積分を Stieltjes 積分の意味で定義することはできない. そこで, 分割をとる際に,f の値として区間の左端を採用するというアイデアを使う. これを伊藤積分という. また, 通常の Riemann 積分と同様に, 伊藤積分の具体的な計算方法を与えたい. そこで, 合成関数の微分公式に相当する伊藤の公式が重要な計算の道具となる.

伊藤の公式の主張は, 微分形式の形で書くと, 以下の通りである.

$$\{X_t\} : dX_t = udt + vdB_t\text{で与えられる伊藤過程}$$
$$g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}), Y_t := g(t, X_t)$$
$$\Longrightarrow dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2 dt$$

右辺の第 3 項は通常の Riemann 積分では現れない項であることに注意したい.

伊藤の公式は, 確率微分方程式の理論全体において, きわめて重要な役割を果たしている. 今回は, 伊藤積分を導入し, 伊藤の公式の証明の概略を述べることとする. また, 応用例として確率微分方程式を求積法で求める例も述べたい. 確率微分方程式のさらなる議論は, 堀氏に委ねることとする.

参考文献

[1] Bernt Oksendal,Stochastic Differential Equations -An Introduction with Applications- (Sixth Edition). Springer

[2] Rick Durrett,Probability:Theory and Examples (Third Edition). Duxbury

[3] Karatzas,I.,Shreve,S.E.,Brownian Motion and Stochastic Calculus.Second Edition. Springer-Verlag

[4] 舟木直久, 確率微分方程式 岩波書店

確率微分方程式の解の存在と一意性
Kalman-Bucy フィルターへの応用

Yoshitaka Hori
京都大学理学研究科数学数理解析専攻数学系　修士１年

1 Introduction

確率微分方程式

$$\text{(SDE1)} \qquad \frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \quad b(t,x), \sigma(t,x) \in \mathbb{R}$$

の解 $X_t(\omega)$ について考えたい. ここで W_t は 1 次元ホワイトノイズである. 伊藤積分によって (SDE1) を解釈すれば,

$$\text{(SDE2)} \qquad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

となる. ただし,W_t は $\frac{dB_t}{dt}$ と置き換えた. また B_t は 1 次元ブラウン運動である. この方程式に対する興味として, 解の存在と一意性が示せるかどうかと, その解の性質である.（求積法で解ける例については稲田氏の伊藤の公式の紹介の部分に委ねることとする.）なので前半は (SDE2) の解の存在と一意性, 得られる解の性質について紹介する.
またこのようにノイズを扱う確率微分方程式は, 今日工学や医学など様々な応用があり, なかでも GPS 機能など「観測」（一般に情報にノイズが含まれるもの）を必要とする宇宙航空工学分野においては, フィルターの問題がある. すなわち「ノイズを含む情報から必要な情報をこしとる（filtering する）ための最良の方法は何か.」というもので, この理論を 1960 年に Kalman,1961 年に Kalman と Bucy が今日 Kalman-Bucy フィルターとして知られているフィルター理論を証明した. 後半はこの線型フィルターの問題

$$\text{(線型な系)} \qquad dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t, \quad F(t), C(t) \in \mathbb{R}$$

$$\text{(線型な観測)} \qquad dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, \quad G(t), D(t) \in \mathbb{R}$$

に対する Kalman-Bucy フィルターの理論と, 時間が許せばその具体例を紹介する.

参考文献

[1] B.Oksendal, Stochastic Differential Equation 6th Edition, An Introduction with Applications, *Springer.*(2007)
[2] R.Durrett, Probability,Theory and Examples 3th Edition, *Cornell University.*(2005)
[3] L.Karatzas,S.Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus 2th Edition ,*Springer.*(1991)

5 次変形 KdV 方程式の時空間解析解の存在及び平滑化効果について

友枝 恭子　(奈良女・人間文化　博士研究員)

次の 5 次変形 KdV 方程式の初期値問題について考察する:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^5 u = 6\partial_x(u^5) + 10(\partial_x u)^3 + 40u\partial_x u\partial_x^2 u + 10u^2\partial_x^3 u, & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

本講演では，この初期値問題の時空間解析的な時間局所解の存在及び平滑化効果の結果について報告する．主定理を述べる為に, 次の Bourgain 空間を導入する (Bourgain [1] 参照):

$$
X_b^s = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{X_b^s} < \infty\},
$$

ただし

$$
\|f\|_{X_b^s} \equiv \left\| \left(1 + |\tau + \xi^5|\right)^b (1 + |\xi|)^s \hat{\hat{f}}(\tau, \xi) \right\|_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R}^2)}
$$

であり, $\hat{\hat{f}}$ は時間変数と空間変数に関する Fourier 変換を表す。

主定理. s と b は、$s \geq 3/4$, $b \in (1/2, 3/5)$ を満たす任意の実数とする．初期値 $\phi(x) \in H^s(\mathbb{R})$ は以下を満たすとする:

$$
(2) \qquad \begin{cases} (x\partial_x)^k \phi(x) \in H^s(\mathbb{R}) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_0^k}{k!} \|(x\partial_x)^k \phi\|_{H^s} < \infty \quad \text{for some } 0 < A_0 < 1. \end{cases}
$$

このときある正の時間 $T = T(\phi) > 0$ が存在して, 以下を満たす (1) のただ 1 つの解 $u \in C((-T,\ T),\ H^s) \cap X_b^s$ が存在する:

$$
(3) \qquad \begin{cases} P^k u \in C((-T,\ T),\ H^s) \cap X_b^s, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_0^k}{k!} \|P^k u\|_{X_b^s} < \infty. \end{cases}
$$

ここに $P = 5t\partial_t + x\partial_x$ である．

さらに上記の解 u は以下の評価式を満たす:

$$
(4) \qquad |\partial_t^m \partial_x^l u(t,x)| \leq C A_1^{m+l}(m+l)! \quad l, m = 0, 1, 2, \cdots, \\
\text{for some } A_1 > 0 \text{ and any } (t,x) \in (-T, 0) \cup (0, T) \times \mathbb{R}.
$$

証明手順については以下のとおりである:

1. (1) の時間局所解の存在を縮小写像の原理により証明する．
2. P を用いて書き換えた 5 次変形 KdV 方程式系
   $$\partial_t P^k u - \partial_x^5 P^k u = (P+5)^k \left\{6\partial_x(u^5) + 10(\partial_x u)^3 + 40u\partial_x u\partial_x^2 u + 10u^2\partial_x^3 u\right\} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$
   と擬微分作用素の L^2 有界性定理を主に使って (3) から (4) を導く．

参考文献

[1] J.Bourgain, Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I Schrödinger equations, Geom. and Functional. Anal. **3** (1993), 107-156.

一次元 Maxwell-Dirac 方程式の局所適切性

岡本 葵
京都大学理学研究科数学教室　修士課程 2 年

Maxwell-Dirac 方程式は量子電磁気学に現れる方程式であり，次のように与えられる．

$$\begin{cases} (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = A_\mu\gamma^\mu\psi, \\ \Box A_\mu = \langle\gamma^0\gamma_\mu\psi,\psi\rangle \ (\mu=0,1), \\ \partial_t A_0 = \partial_x A_1, \\ \psi(0,x)=\psi_0(x),\ A_\mu(0,x)=a_\mu(x),\ \partial_t A_\mu(0,x)=\dot{a}_\mu(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\psi:\mathbb{R}^{1+1}\to\mathbb{C}$, $A_\mu:\mathbb{R}^{1+1}\to\mathbb{R}$ $(\mu=0,1)$ であり，m は非負定数，$\gamma^0=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma^1=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ である．上下に対となって現れる添え字については和をとるものとする．この方程式の局所適切性（解の存在，一意，初期値に対する連続依存性）を調べる．双線形評価を用いて，次を得る：

定理 1. *$s>0$, $s<r\le\min(2s+1/2,s+1)$, $(s,r)\ne(1/2,3/2)$ とする．このとき，(1) は $H^s(\mathbb{R})\times H^r(\mathbb{R})$ において局所適切である．*

$(s,r)=(0,1/2)$ の周りにおける不適切性に関して，次が得られた．

定理 2. *$s<1/2$, $r>\max(2s+1/2,1/2)$ のとき，次を満たすような列 $\{u_N\}\subset H^s$ が存在する：$\|u_N\|_{H^s}\le 1$, 及び $\left(\begin{smallmatrix}u_N\\0\end{smallmatrix}\right)$, 0 を初期値とする $[0,T]$ における (1) の解 $(\psi_N,A_{\mu,N})$ は*

$$\|A_{0,N}(t)\|_{H^s}\ge ctN^\alpha,\ 0<t\le T,\ \alpha=\alpha(r,s)>0$$

を満たす．

$r\le 1/2$ のとき，(1) の解写像は C^2 級ではない．

$(s,r)=(0,1/2)$ における局所適切性を得るために，確率化する．そのため，以降は $x\in\mathbb{T}$ で考える．

定義. $\{h_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ をある確立空間 $(\Omega,\mathcal{A},p)$ 上の独立な標準正規分布の列とする．$f(x)=\sum_{n=1}^\infty \alpha e_n(x), \alpha\in\mathbb{R}$ により与えられる関数 $f\in H^s(\mathbb{T})$ に対して，$(\Omega,\mathcal{A})$ から $H^s(\mathbb{T})$ への写像 $\omega\longmapsto f^\omega=\sum_{n=1}^\infty h_n(\omega)\alpha e_n$ を定めると，$f^\omega\in L^2(\Omega;H^s(\mathbb{T}))$ である．このような $H^s(\mathbb{T})$ に値を持つ確率変数を f の確率化と呼ぶ．

Grünrock により導入された次の空間を考える．

$$\widehat{H^{s,p}}(\mathbb{T}):=\{f:\|f\|_{\widehat{H^{s,p}}}=\|\langle\xi\rangle^s\widehat{f}\|_{l_n^{p'}}<\infty\},\ 1/p+1/p'=1.$$

定理 3. *$s\ge 0$, $s\le r\le s+1$, $r<2s-2/p+1/q+1$ とし，初期値 $\psi_0\in H^s(\mathbb{T})$, $a_0,a_1\in H^r(\mathbb{T})$, $\dot{a}_0,\dot{a}_1\in H^{r-1}(\mathbb{T})$ を確率化する．このとき，殆どすべての $\omega\in\Omega$ に対して，ある $T_\omega>0$ が存在して，(1) の解 (ψ,A_μ) が $C([-T_\omega,T_\omega];\widehat{H^{s,p}}(\mathbb{T}))\times C([-T_\omega,T_\omega];\widehat{H^{r,q}}(\mathbb{T}))$ において存在する．*

参考文献

[1] N. Burq and N. Tzvetkov, Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I;local theory, Invent. Math., 2008, 173.

[2] P. D'Ancona, D. Foschi, and S. Selberg, Null structure and almost optimal local well-posedness of the Maxwell-Dirac system, Amer. J. Math., 2010, 137.

[3] J. Holmer, Local ill-posedness of the 1D Zakharov system, Electron. J. Differential Equations, 2007, no. 24.

Stabilty theory of bound states of Hamiltonian PDE

Masaya Maeda[†]

[†]Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University,,
maeda@math.kyoto-u.ac.jp

In this talk we consider the following abstract Hamiltonian PDE on a Hilbert space X:

$$u_t = JE'(u), \tag{1}$$

where J is a skew adjoint operator and E is a C^1 function on X. Further, let $T(s)$ be the symmetry of (1), i.e., $E(T(s)u) = E(u)$. In this case, formally (1) have two conservation quantities E and Q, where $Q(u) := \frac{1}{2}\langle J^{-1}T'(0)u, u\rangle$.

We consider the stability of bound states which are the solutions of (1) in the form $T(\omega t)\phi$, where $\phi \in X$. For this purpose, we assume the following.

Assumption 1. (i) *For all $u_0 \in X$, there exists $T = T(||u_0||_X)$ and $u \in C((-T,T);X) \cap C^1((-T,T);X^*)$ such that u is a solution of (1) with $u(0) = u_0$ and u conserves E and Q.*

(ii) *There exists a C^1 map $\omega \mapsto \phi_\omega \in X$ such that $T(\omega t)\phi_\omega$ is a nontrivial bound state.*

Now, let $S_\omega := E - \omega Q$ and $d(\omega) := S_\omega(\phi_\omega)$. We further assume the following.

Assumption 2. *$S''_\omega(\phi_\omega)$ has one negative eigenvalue one zero eigenvalue and the other spectrum are bounded away from zero.*

This situation often appears when we consider the ground states of nonlinear Schrödinger equations and nonlinear Klein-Gordon equations.

Under these assumptions, Grillakis, Shatah and Strauss [1] showed the following results.

Theorem 1. *If $d''(\omega) > 0$, then $T(\omega t)\phi_\omega$ is stable and if $d''(\omega) < 0$, then $T(\omega t)\phi_\omega$ is unstable.*

We consider the remaining case $d''(\omega) = 0$ and discuss the relation between the convexity of the function d and stability.

References

[1] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197. MR MR901236 (88g:35169)

半線型 Klein-Gordon 方程式の安定性

山崎　陽平
京都大学理学研究科数学数理解析専攻数学系　修士１年

1 Abstract

考える方程式は $u = u(x,t)$ について

$$u_{tt} - \Delta u + u + f(|u|)\arg u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad n > 2 \tag{SLKG}$$

である. ここで,$\arg u = u/|u|, f(0) = f'(0) = 0$ とする. このとき,(SLKG) の非自明な standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ を求める方程式

$$-\Delta\varphi + (1-\omega^2)\varphi + f(|\varphi|)\arg\varphi = 0 \tag{1}$$

について考える. このとき $J_\omega(\psi) := \frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2dx + \frac{1-\omega^2}{2}\int|\psi|^2dx + \int G(|\psi|)dx \quad (G' = f, G(0) = 0)$ の $M_\omega := \left\{\psi \in H^1_r(\mathbb{R}^n); \frac{n-2}{2}\int|\nabla\psi|^2dx + n\left(\frac{1-\omega^2}{2}\int|\psi|^2dx + \int G(|\psi|)dx\right) = 0\right\}$ 上での最小値

$$d(\omega) := \inf_{\psi\in M_\omega} J_\omega(\psi)$$

について考えると, ある (1) の解 φ_ω が存在して $d(\omega) = J_\omega(\varphi_\omega)$ となる. ここで $d(\omega)$ を ω についてある区間上の関数としてみたとき以下が成り立つ.

定理 1. *(Shatah,'83 [1])*
もし $d(\omega)$ がある ω_0 の近傍で狭義凸関数であれば φ_{ω_0} は安定である.

発表では上の定理を解説し, 同論文の

$$u_{tt} - \Delta u + u - |u|^{p-1}u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad n > 2, \quad \text{ただし}, 1 < p < 1 + 4/n$$

は非自明な standing wave $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$ をもちそれは $1 > \omega^2 > (p-1)/(4-(n-1)(p-1))$ となる ω について安定である.
という例を紹介する.

参考文献

[1] J.Shatah, Stable Standing Waves of Nonlinear Klein - Gordon Equations, *Commun. Math. Phys. 91,313-327*,(1983).

[2] J.Shatah, Unstable Ground State of Nonlinear Klein - Gordon Equations, *Americn Mathmatical Society Vol.290,No.2,701-710*,(1985).

微分方程式の大域的解析と完全 WKB 解析

廣瀬 三平

京都大学 数理解析研究所

微分方程式の解であって, 解の大域的な挙動がわかる函数として超幾何函数や Bessel 函数, Airy 函数などがあるが, これらは特殊函数と呼ばれ数学のみならず物理学や工学など様々な応用を持つ. ここで大域的な挙動がわかるのは, 解が積分表示を持つ場合がその多くを占めるのであるが, 多くの微分方程式の解は積分表示が得られず, 大域的な挙動を調べるのは困難であった.

一方, 1 次元の Schrödinger 方程式, つまり 2 階の線型常微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2 Q(x)\right)\psi=0$$

(ここで $Q(x)$ は有理函数であり, η はプランク定数の逆数, つまり大きなパラメータと考える) を解析する手段として, WKB 解

$$\psi(x,\eta)=\exp\int^x (S_{-1}(x)\eta+S_0(x)+S_1(x)\eta+\cdots)\,dx$$

を用いた WKB 解析があるが, これは形式解であり, 数学的には完全ではない. この WKB 解に対して Borel 総和法を適用させ, 解析的意味づけを与えたのが完全 WKB 解析であるが, これは方程式から積分表示解を構成する方法とみる事ができ, 解の大域的な挙動を調べるのに有効である. この手法はさらに高階 (3 階以上) の線型常微分方程式や Painlevé 方程式を含むある種の非線型常微分方程式に拡張されてきたが, その多変数化, つまり holonomic 系への拡張はほぼ手つかずの状態である.

本講演では完全 WKB 解析の基本的な部分から始め, 微分方程式の大域的解析に有用ということをみた後に, 具体的な holonomic 系に対し完全 WKB 解析を展開することを目標とする.

参考文献

[A] 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録, 1433, 2005, pp. 1-8.

[AKT] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学 — exact WKB analysis について —, 数学, **45**, 1993, pp. 299-315.

[KT] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.

[T] 竹井義次, 完全 WKB 解析, そして完全最急降下法 — 特異摂動の代数解析学続論 —, 数学, **55**, 2003, pp. 350-367.

放物型 Hardy 空間について

中川　勇人（大同大学非常勤講師）

概要

上半空間上の放物型作用素の解空間として定まり Hardy 空間に含まれる関数空間，いわゆる放物型 Hardy 空間において，境界挙動および Carleson 不等式についていくつか結果を得た．境界挙動に関して得られた定理より，放物型 Hardy 空間に属する関数は境界上のほとんどいたるところで非接境界極限を持つことがわかる．また，放物型 Hardy 空間 h^p_α において，$1 < p \le q < \infty$ という状況のもとでの Carleson 不等式の成立のための必要十分条件を，上半空間における測度の特徴づけを行うことで実現する．

1　放物型 Hardy 空間

$(n+1)$ 次元 Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ $(n \ge 1)$ において，放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は，

$$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha \qquad (0 < \alpha \le 1)$$

で定義される．ここで Δ_x は x に関する Laplace 作用素である．放物型 Hardy 空間 h^p_α $(1 < p \le \infty)$ を

$$h^p_\alpha := h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{上連続関数} \mid L^{(\alpha)}u = 0, \|u\|_{h^p_\alpha} < \infty\}$$

と定義する．ここでノルムは古典的な Hardy 空間と同様に

$$\|u\|_{h^p_\alpha} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 < p < \infty), \\ \sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| & (p = \infty), \end{cases}$$

と定める[*1]．放物型 Hardy 空間は Banach 空間になる．

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35K05; Secondary 26D10, 31B10

Keywords and phrases: Parabolic operator, Hardy space, boundary behavior, Carleson inequality

第 2 回白浜研究集会, November 29 – December 2, 2010.

[*1] 古典的な調和 Hardy 空間において $p = 1$ の場合は $1 < p \le \infty$ の場合とは性質がかなり異なるため扱いが難しくなることが知られており，放物型 Hardy 空間においても同じ状況が発生することが予想される．ここでは h^1_α には触れないことにする．

放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は,

$$W^{(\alpha)}(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

で定義される．ここで $x\cdot\xi$ は x と ξ との内積であり，$|\xi| = (\xi\cdot\xi)^{1/2}$ である．$W^{(\alpha)}(x,t)$ は $\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ Poisson 核，熱核に一致する．$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ について

$$P^{(\alpha)}[f](x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t) f(y) dy$$

とおく．$W^{(1/2)}$ は Poisson 核であったので，$P^{(1/2)}[f]$ は f の Poisson 積分である．放物型 Hardy 空間に属する関数と境界上の関数について以下のことがわかる．

命題 1. $1 < p \le \infty$ とする．関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $P^{(\alpha)}[f] \in h^p_\alpha$ である．逆に，h^p_α に属する関数 u に対して，$u = P^{(\alpha)}[f]$ を満たす関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．さらに，$\|P^{(\alpha)}[f]\|_{h^p_\alpha} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ が成立する．

2 境界挙動

Shapiro は σ-set という境界上の点の集合を定義し，そこに属する点においては非接境界極限が存在することを示した．この節では，放物型 Hardy 空間についても考えることによってこの結果を一般化および拡張する．

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ の Lebesgue 点において Poisson 積分 $P^{(1/2)}[f]$ は非接境界極限をもつ．Shapiro は σ-set の概念を導入した（[S]）．$1 \le p \le \infty$ および $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，f の σ-set は任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta$ および $r < \delta$ であれば

$$\left| \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x_0))\, dy \right| < \varepsilon(|x-x_0| + r)^n \qquad \big(B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\}\big)$$

が成り立つ $\mathbb{R}^n$ 上の点 x_0 の集合として定義される．σ-set は常に Lebesgue 点の集合を含み，さらに，ある f については σ-set は Lebesgue 点の集合を真に含んでいる．σ-set の点においても Poisson 積分 $P^{(1/2)}[f]$ が非接境界極限をもつことが示されている[*2]．

Shapiro の手法を参考に放物型 Hardy 空間においても考察した．$0 < \beta < \infty, \gamma > 0$ および $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$C_{\beta,\gamma}(x_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |x - x_0|^\beta \le \gamma^{-1} t\}$$

と定義する．$\beta = 1$ とすると，通常の意味の非接接近領域になる．また，$1 \le p \le \infty$ および $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，f の β 次 σ-set $\mathcal{S}_\beta[f]$ を次の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の点 x_0 の

[*2] 熱核を積分核とした積分 $P^{(1)}[f]$ についても同様の結果が示されている．

集合として定義する；
任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta$ および $r < \delta$ であれば

$$\left| \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x_0))\, dy \right| < \varepsilon(|x - x_0|^\beta + r)^n$$

が成り立つ．$\beta = 1$ とすると σ-set に一致する．

これらの表記を用いて放物型 Hardy 空間に属する関数についての境界挙動における次の結果が得られた．

定理 1. $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta_1, \beta_2 < \infty, 1 \leq p \leq \infty$ および $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ とする．もし，$\beta_2 \leq 2\alpha\beta_1$ が満たされていれば，任意の $x_0 \in \mathcal{S}_{\beta_1}[f]$ および $\gamma > 0$ に対して

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ (x,t)\in C_{\beta_2,\gamma}(x_0)}} P^{(\alpha)}[f](x,t) = f(x_0)$$

が成立する．

この定理を非接極限に限定した形（すなわち $\beta_2 = 1$ のとき），および境界上の関数 f と $P^{(\alpha)}[f]$ との関係を考えると，以下の結論が得られる．

主定理 1. $0 < \alpha \leq 1, 1 < p \leq \infty$ に対して，任意の $u \in h^p_\alpha$ は境界上のほとんど全ての点において非接境界極限をもつ．

3 Carleson 不等式（鈴木紀明先生（名城大学）との共同研究）

まず，$T(\alpha,\tau)$-Carleson 測度を導入する．

定義 1. μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$0 < \alpha \leq 1, \tau > 0$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t)) \leq Ct^\tau \tag{1}$$

が満たされているとき，μ を $T(\alpha,\tau)$-Carleson 測度と呼ぶ．ここで，

$$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y - x|^{2\alpha} + s \leq t\}$$

である．また，

$$\kappa_{\alpha,\tau}[\mu] = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{t^\tau}$$

とおき，$T(\alpha,\tau)$-Carleson 定数と呼ぶ．

$\alpha = 1/2$ とすると従来の Carleson 測度およびその定数になる．$T(\alpha,\tau)$-Carleson 測度を用いて放物型 Hardy 空間における Carleson 不等式成立のための必要十分条件が以下の定理のように表せる．

主定理 2. $0 < \alpha \leq 1, 1 < p \leq q < \infty$，$\mu$ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の正 Borel 測度とする．このとき，放物型 Hardy 空間において Carleson 不等式が成立する，すなわち，ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h^p_\alpha$ に対して，次の不等式

$$\|u(x, t^{2\alpha})\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C\|u\|_{h^p_\alpha}$$

が常に成立するための必要十分条件は，μ が $T(\frac{1}{2}, \frac{q}{p}n)$-Carleson 測度であることである．

μ が $T(\frac{1}{2}, \frac{q}{p}n)$-Carleson 測度であるとき，Carleson 不等式の定数部分は α, p, q, n により μ にはよらない定数 C を用いて $C\left(\kappa_{\frac{1}{2}, \frac{q}{p}n}[\mu]\right)^{1/q}$ と表せる．さらに $p = q > 2$ のときには，μ が $T(\frac{1}{2}, n)$-Carleson 測度であるという仮定の下で Carleson 不等式が成立し，その定数部分が α にのみより μ, p, n によらない定数 C を用いて $C\left(\kappa_{\frac{1}{2}, n}[\mu]\right)^{1/p}$ と表すことができる（[N1]）．

参考文献

[N1] 中川　勇人, 放物型 Hardy 空間における Carleson measure inequality, 数理解析研究所講究録 **1618** (2008), 82–88.

[N2] 中川　勇人, 放物型 Hardy 空間における Carleson 測度と Carleson 不等式との関係, 数理解析研究所講究録 **1669** (2009), 114–121.

[N3] H. Nakagawa, *A remark on the limits of nontangential type for generalized Poisson integrals*, International Pure and Applied Math. J., Vol. **59**, No. 3 (2010), 343–348.

[NSS] M. Nishio, N. Suzuki and K. Shimomura, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153–162.

[S] V. L. Shapiro, *Poisson integrals and nontangential limits*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **134**, No. 11 (2006), 3181–3189.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.

Local well-posedness for the Zakharov system on torus

岸本　展　　（京都大学大学院理学研究科）

本講演では，非線形 Schrödinger 方程式と非線形波動方程式の連立系である Zakharov 方程式の初期値問題の適切性を周期境界条件下で考える．

$$
\text{(Z)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \alpha\Delta u = nu, \qquad u : [-T,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\beta^2}\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta(|u|^2), \qquad n : [-T,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}, \\ (u,n,\partial_t n)\big|_{t=0} = (u_0,n_0,n_1) \in \mathbf{H}^{s_1,s_2} := H^{s_1}(\mathbb{T}^d;\mathbb{C})\times H^{s_2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R})\times H^{s_2-1}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}). \end{cases}
$$

ここで，$\alpha \neq 0$ および $\beta > 0$ は実数のパラメータ，$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ は d 次元トーラスを表す．Zakharov 方程式はプラズマ物理における「ラングミュア乱流」と呼ばれる現象のモデルである ([4])．(Z) の Sobolev 空間 $\mathbf{H}^{s_1,s_2}$ における（時間局所）適切性とは

$$
u \in C([-T,T];H^{s_1}(\mathbb{T}^d;\mathbb{C})), \quad n \in C([-T,T];H^{s_2}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}))\cap C^1([-T,T];H^{s_2-1}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}))
$$

のクラスに属する局所解の存在と（適当な意味での）一意性，および初期値に対する連続依存性を意味し，どのような指数 (s_1,s_2) の範囲で適切性が成り立つかが一つの研究対象となる．

全空間 $(x \in \mathbb{R}^d)$ の場合には (Z) の適切性は非常によく研究されている．例えば Ginibre, Tsutsumi, Velo [2] による結果はすべての空間次元 d を扱っており，特に 4 次元以上と 1 次元では，おおよそ optimal な範囲の指数について適切性を得た．また 2 次元の場合も Bejenaru, Herr, Holmer, Tataru [1] により（ある意味）optimal な結果が得られている．パラメータ α, β は変数変換で適当に正規化でき，少なくとも時間局所適切性を考える限りは結果に何の影響も与えないことを注意しておく．

トーラスにおける適切性の先行結果は全空間の場合に比べて少ない．トーラスでは分散性による平滑化効果が弱く，波動方程式の非線形項がもつ微分の損失を回復し難いことが理由として挙げられる．1 次元では Takaoka [3] によりおおよそ optimal な範囲の指数に対して適切性が得られているものの，多次元の結果は（講演者の知る限り）知られていない．

1 次元トーラスの結果において注目すべきは，適切性を得られる最も小さい指数 (s_1,s_2) が，β/α が整数の場合 $(\frac{1}{2},0)$，非整数の場合 $(0,-\frac{1}{2})$ と異なる点である．パラメータを正規化する変数変換はトーラスの場合空間周期を変えてしまうが，β/α が整数であることはちょうど周期が 2π の自然数倍であることに対応する．このときには，線形解の持つ振動が非線形相互作用により打ち消される「共鳴状態」が起こりうる．実際，非線形項の影響が小さいと見なす逐次近似法を用いる限り，上記の指数がそれぞれの場合 optimal であることがわかり，適切性を得られる指数の範囲は共鳴条件をみたすとき真に狭くなる．

講演ではこれらのことを具体的な計算により確かめるとともに，2 次元トーラスについて得られた結果を紹介する予定である．依然として計算中であるので，主定理は講演中に述べる．

本研究は科研費（課題番号:08J02196）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] I. Bejenaru, S. Herr, J. Holmer, and D. Tataru, *On the 2D Zakharov system with L^2 Schrödinger data*, Nonlinearity **22** (2009), 1063–1089.

[2] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. **151** (1997), 384–436.

[3] H. Takaoka, *Well-posedness for the Zakharov system with the periodic boundary condition*, Differential Integral Equations **12** (1999), 789–810.

[4] V.E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JETP **35** (1972), 908–914.

空間 1 次元における 3 次の非線形項を持つシュレディンガー型方程式に対する散乱状態の非存在について

池田　正弘

空間 1 次元 $x \in \mathbf{R}$ における 3 次の非線形項を持つ次の非線形シュレディンガー型方程式の解の漸近的振る舞いを考える。

$$\partial_t u - \frac{i}{\rho} |\partial_x|^\rho u = \lambda |u|^3, \quad (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \tag{0.1}$$

ここで u は (t,x) の複素数値関数の未知関数である。 $\rho \geq 2, \lambda \in \mathbf{C}$ とする。 $|\partial_x|^\rho = \mathcal{F}^{-1} |\xi|^\rho \mathcal{F}$ と定義し $\mathcal{F}\phi$ or $\hat{\phi}$ はフーリエ変換で、$\mathcal{F}^{-1}$ はフーリエ逆変換である。次に重み付きソボレフ空間を導入する。$m, s \in \mathbf{R}$ に対して、重み付きソボレフ空間を次で定義する。

$$\mathbf{H}_x^{m,s} = \left\{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}) ; \|\psi\|_{\mathbf{H}_x^{m,s}} = \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{s/2} (1-\Delta)^{m/2} \psi \right\|_{\mathbf{L}_x^2} < \infty \right\}.$$

我々の目的は方程式 (0.1) に対する漸近自由解の非存在を示すことである。これは下村氏と堤氏によって得られた空間 2 次元における通常のシュレディンガーに対する結果 ([1]) の 1 次元版を与え、それを一般の分散型方程式 (0.1) への拡張を意味する。次の結果が得られる:

Theorem 0.1. *$\lambda \in \mathbf{C}, \rho \geq 2, \frac{\rho-2}{2} \leq \alpha < \frac{\rho-1}{2}$ and $\kappa > \frac{1}{2}$ とする。ある正の定数 $T \geq 0$, 評価 $\|\hat{u}_+\|_{\mathbf{Z}_\infty^\alpha} + \|\hat{u}_+\|_{\mathbf{Z}_2^{\rho-1}} < \infty$ を満たす散乱状態 $u_+ \in \mathbf{H}_x^{0,\kappa}$ と 次の漸近形を持つ方程式 (0.1) の解 $u \in \mathbf{C}\left([T,\infty); \mathbf{L}_x^2\right)$ が存在したと仮定する:*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - U(t) u_+\|_{\mathbf{L}_x^2} = 0 \tag{0.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{4}} \left(\int_t^\infty \|u(s) - U(s) u_+\|_{\mathbf{L}_x^\infty}^4 ds \right)^{\frac{1}{4}} = 0. \tag{0.3}$$

このとき、散乱状態 $u_+ \equiv 0$ である。*($\|\hat{u}_+\|_{\mathbf{Z}_\infty^\alpha} + \|\hat{u}_+\|_{\mathbf{Z}_2^{\rho-1}}$ の定義は講演で紹介する)*

References

[1] A. Shimomura and Y. Tsutsumi, *Nonexistence of scattering states for some quadratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions,* Differential Integral Equations **19** (2006), 1047-1060

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Osaka, Toyonaka, 560-0043, Japan

E-mail address: m-ikeda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Key words and phrases. Schrödinger type equations, asymptotics of solutions, wave operator.

摂動された波動方程式の解のエネルギー評価について

若杉勇太（大阪大学）

アブストラクト

空間 n 次元の定数係数波動方程式

$$\partial_t^2 u(t,x) - \triangle u(t,x) = 0$$

を，$x-$ 空間内のコンパクトな領域上で摂動させた方程式

$$\partial_t^2 u(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u(t,x)) + b(t,x)\partial_t u(t,x) = 0 \qquad (1)$$

を考える．u は複素数値の未知関数である．係数 a_{ij}, b に対しては次を仮定する：$a_{i,j}, b \in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, real-valued , $a_{ij} = a_{ji}, b(t,x) \geq 0$ であり，関数 $\delta(t) \in C^\infty([0,\infty))$ が存在して，

$$a_{ij}(t,x) = \delta_{ij}, b(t,x) = 0 \quad (i,j = 1,\ldots,n, (t,x) \in [0,\infty)\times\{|x| \geq {}^\exists R\})$$
$$|\xi|^2 \lesssim \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \lesssim (1+\delta(t))^2|\xi|^2 \quad ((t,x,\xi) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$$
$${}^\forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |\partial_x^\alpha a_{ij}(t,x)| \lesssim (1+\delta(t))^2 \quad (i,j = 1,\ldots,n, (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n).$$

さらに，次を満たす陪特性曲線の列 $(X_\lambda(t), \Xi_\lambda(t))$ があると仮定する：

$$|X_\lambda(t)| \leq {}^\exists C^*, |\Xi_\lambda(t)| \geq {}^\exists c^* \quad (\lambda \in \mathbb{N}, t \geq 0)$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} |\Xi_\lambda(t)| = \infty \quad (t \geq 0).$$

このような仮定のもとで，私はまず，(1) の解作用素 $\mathscr{R}(t,0)$ の下からの有界性を与えた．さらに，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，解のエネルギーが $\exp(ct^\alpha)$ のオーダーで上昇するような摂動の具体例を構成した．これは，空間的にコンパクトな摂動に対しても，エネルギーが時間とともに増大することが起こりうることを示している．

2 階楕円型偏微分方程式の弱解の存在

田部井 希一
京都大学理学研究科 数学数理解析専攻 数学系 修士１年

1 Abstract

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域,

$$Lu := D_i\left(a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u\right) + c^i(x)D_iu + d(x)u$$

として，今回考えるのは

$$Lu = g + D_if^i \quad in\ \Omega$$

の弱解について，つまり $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \{(a^{ij}D_ju + b^iu)D_iv - (c^iD_iu + du)v\}dx = \int_\Omega (f^iD_iv - gv)dx$$

の方程式をみたす解についてである．ただし，L は Ω 上 strictly elliptic であり，係数は Ω 上有界であるとする．つまり，

$$\exists\lambda > 0,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{(strictly elliptic)}$$

$$\exists\Lambda, \nu \geq 0, \quad \sum_{i,j}|a^{ij}|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum_i\left(|b^i|^2 + |c^i|^2\right) + \lambda^{-1}|d| \leq \nu^2 \quad \text{(有界性)}$$

また，L の係数には可測性や弱微分可能性などの適当な仮定はついているものとする．

今回の主定理は以下のものである．

定理 1.1.

$$\forall v \in W_0^{1,1}(\Omega),\ v \geq 0,\ \int_\Omega (dv - b^iD_iv)dx \leq 0$$

を L がみたし，$\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, $g, f^i \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．このとき，

$$Lu = g + D_if^i \quad in\ \Omega, \quad u = \varphi \quad on\ \partial\Omega$$

をみたす $u \in W^{1,2}(\Omega)$ が一意に存在する．

着想としては，まず $\sigma \in \mathbb{R}$，$L_\sigma u := Lu - \sigma u$ として，L_σ に対応する，積分で表される $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上の双線型形式 $\mathscr{L}_\sigma$ が有界かつ coercive となるような σ を考える．この設定の下で，Lax-Milgram の定理や Sobolev imbedding のコンパクト性，Fredholm の択一定理などの有名な結果を用いることで，きれいに示すことができるということを説明したいと思う．

参考文献

[1] D.Gilbarg, N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, *Springer-Verlag* (1977)

GPU を用いた多倍長数値計算環境の設計と実装

京都大学大学院 情報学研究科 複雑系科学専攻 M1
眞鍋　秀悟

ディジタル計算機による科学技術計算は丸め誤差を伴い, その誤差の累積により計算結果が意味をなさない問題がある. これに対し, 多倍長数値計算の適用の研究が進められているが, その計算の高速化のため, 本研究では GPU(Graphics Processing Unit) を用いた多倍長計算環境の設計と実装を行っている.

数値計算を行うにあたりディジタル計算機では有限個の実数からなる集合 $\mathbb{F}$ を決定し, 実数を $\mathbb{F}$ の元で近似する. すなわち写像 $r : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ を定め, $r(x)$ を x の近似値として扱う. この写像 r を丸め, $|r(x) - x|$ を丸め誤差という. 例えば, 加法 $x + y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ はディジタル計算機では $\mathbb{F}$ の元となるように $r\left(r(x) + r(y)\right)$ で近似される. すなわち丸め誤差には $\mathbb{F}$ および r の設定が関わっており, この 2 つを適切に定めることにより丸め誤差は小さくすることができる.

丸め r として代表的なものに IEEE754-2008 で標準的な定められた丸めがある. 講演者が考える計算環境は標準的な丸めを提供するものである. また上述の $\mathbb{F}$ として代表的なものに固定小数点方式と浮動小数点方式の 2 つの方法がある. これらはどちらも正整数 β および p が与えられたときに

$$(-1)^s \times \left(a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_p}{\beta^p}\right) \times \beta^e \qquad (0 \leqslant a_i < \beta,\ s = 0, 1)$$

と表される有理数から構成される. 固定小数点方式では e は予め定めた数であり, 浮動小数点方式では e は予め定めた集合の元である. 現在のディジタル計算機では $\beta = 2$（二進法）とし, $p = 23$ の単精度演算, $p = 52$ の倍精度演算が一般的に用いられている. 多倍長数値計算環境とは上の p を大きくとることによって丸め誤差の軽減を図る環境であるが, そのためこの計算環境はハードウェアにより提供された演算に比べ, 著しく遅い.

一方近年, 画像描画用途のプロセッサ GPU(Graphics Processing Unit) を科学技術計算に用いる GPGPU(general-purpose computing on graphics processing units) が普及しつつある. GPU は CPU(Central Processing Unit) に比べて下記のような特徴をもつ:

- 演算コアの数が多い
- 多様な種類のメモリをもつ
- ピーク性能が高い

本研究では, 科学技術計算で主要なアルゴリズムに対する並列計算の研究の進展や, GPU のもつ高い並列処理能力に注目し, 個々の四則演算レベルではなく, 科学技術計算で多く現れる行列演算レベルでの並列化により, 多倍長数値計算の高速化を GPU で実現することを目指す. 発表では現在までの設計と実装および計算速度について報告する.

波動の境界観測を用いたグラフ構造の特徴づけについて

和田 尚樹
京都大学大学院情報学研究科

各辺が一次元区間と同一視される有限グラフ上で波動方程式を考え，グラフ端点における波動方程式の解の境界条件に関する情報から，グラフの内部の構造を同定する逆問題を考察する．ある条件のもと，波動方程式の初期値境界値問題において，端点で Dirichlet 境界条件を与えるごとに解が一意に定まる．このとき，与えた Dirichlet 境界条件に対し，解の Neumann 境界条件が得られるが，この境界上の函数空間における作用素 (D-N 写像) を既知としてグラフの未知構造および，波動方程式の未知係数の同定を考える．

本研究と同様の設定のもとで，グラフがサイクルを含まない場合には既知とした D-N 写像からグラフの未知構造および未知係数が一意に決定されるが，一般の場合には一意性が保証されないことが知られている．本研究では，グラフの構造に端点が十分多いという条件を仮定し，その仮定のもとで D-N 写像からそのグラフに含まれるサイクルの存在の有無が判定可能であることを示す.

参考文献

[1] P. Kuchment, *Quantum graphs: an introduction and a brief survey*, Analysis on Graphs and its Applications in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **77**, pp. 291–314 (2007)

[2] M. Belishev and N. Wada, *On revealing graph cycles via boundary measurements,* Inverse Problems,**25**,(2009)

An estimate for perturbation of the attenuation coefficient and the scattering kernel in the transport equation

TANAKA Daiki

Nov.20 - Nov.21,2010

Graduate School of Informatics, Kyoto University,
Kyoto, 606-8501 Japan
E-mail:**daiki596@acs.i.kyoto-u.ac.jp**

Abstract

The aim of this study is to give an estimate for perturbation of the attenuation coefficient and the scattering kernel in the transport equation. It is an integro-differential equation and is considered a mathematical model for the motion of photons. It has been studied flourishingly as a mathematical model of the optical tomography, whichis a tomogram technique to replace the MRI or the X-ray CT. It is known that its initial-boundary value problem is well-posed in a suitable framework, and we give an estimate for some of perturbation. Our result implies that the solution is stable for perturbation of the attenuation coefficient and the scattering kernel.

References

[1] Alexander D. Klose and Edward W. Larsen, 2006, Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonic equations, *J. Comp. Phys.* , **220**, 441–470.

[2] C. Bardos, R. Santos and R. Sentis, 1984, Diffusion Approximation and Computation of the Critical Size, *Trans. Amer. Math. Soc.* , **284**, 617–649.

[3] Feng Gao, Huijuan Zhao, and Yukio Yamada, 2002, Improvement of image quality in diffuse optical tomography by use of full time-resolved data, *Appl. Opt.* , **41**, 778–791.

[4] Kui Ren, Guillaume Bal and Andreas H. Hielscher, 2007, Transport- and diffusion-based optical tomography in small domains: a comparative study, *App. Opt.* , **46**, 6669–6679.

[5] 鵜飼正二, 輸送方程式, 産業図書, 1976

放物型発展方程式の定常解の数値検証法 - 存在・局所一意性・双曲性 -

*松江　要 (Kaname Matsue)
京都大学理学研究科数学教室 (Department of Mathematics, Kyoto University.)
*Email: k-matsue@math.kyoto-u.ac.jp

キーワード：発展方程式, CR 指数理論, 精度保証付き数値計算法, 局所一意双曲型不動点.

無限次元力学系の平衡点としての、発展方程式の定常解の数値検証法に関する自身の研究を解説する。

偏微分方程式などが生成する無限次元力学系においては、エネルギー減衰する多くの系で、その時間発展に対する漸近的振る舞いを記述する「グローバルアトラクタ」の存在が知られている。しかし、その内部構造に関して、とくに、数学理論のみを用いて導かれている結果は限られている。理論解析だけでは力学系や非線型問題の解の構造解明が困難な時、計算機によるシミュレーションがその理解を助ける場合が多いが、連続系の離散化（打ち切り誤差など)、計算機特有の誤差（丸め誤差など）により、その結果は数学的厳密性を欠くものとなっている。そこで演算を区間に対して行う区間演算に基づいた「精度保証付き数値計算」を併用する事で、計算機で得られる結果が数学的に厳密なものとなり、自然や工学などに現れる様々な現象を数学的視点に立って理解する事を助けてくれる。

基本的な内容は昨年度の白浜研究集会における講演と同じであるが、今年度は昨年度の手法で得られた定常解の局所一意性・双曲性の検証法も交えた話をしてみたい。定常解の存在検証には、有限要素法と Conley 型指数理論を用いる。有限要素法は、微分方程式の解の近似解法の一種であり、方程式が定義される有界領域をいくつかの「要素」に分割、各要素に台を持つ函数たちの線型結合により解を表現する。領域の形状に関して非常に柔軟に対応でき、さらに微分方程式の境界条件にも柔軟に対応できる方法である。Conley 型指数は、力学系の孤立不変集合の存在、安定性を、その特別な（＝孤立化）近傍と、「出口」と呼ばれる部分集合から決まるホモトピー類、あるいは（コ）ホモロジー群で与える位相不変量であり、力学系の構造解析の代数トポロジー的アプローチを可能にする。

今、発展方程式

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(u)$$

を考える時、その定常解 $\bar{u}$ が双曲型であるとは、$\bar{u}$ における線型化作用素 $L = -A + Df(\bar{u})$ のスペクトルが虚軸と交わらない事を指す。双曲性の概念は、「双曲型不変集合」まで一般化され、力学系の構造解析において非常に重要な概念となっている。例えば、力学系を定義する微分同相写像、方程式の摂動に関して不変であったり（すなわち分岐が起こらない)、「全ての周期軌道が双曲型であるという性質が多様体上の力学系の大部分を占める」といった事が知られている（クプカ・スメールの定理)。

双曲型不変集合の構造は既存の力学系理論でよく知られたところであるが、「不変集合が双曲型構造を持つかどうか」という問題に関しては明確な検証法が殆ど存在せず、有限次元力学系でさえ、私の知る限り研究され始めて１０年くらいしか経っていないと思われる。無限次元の力学系に関しては、作用素のスペクトルが無限集合であるが故に、不動点の双曲性検証すらあまり知られていない（少なくとも私は知らない)。ここでは、中尾理論 ([2]) に基づく線型化作用素の可逆性・固有値除外検証法と、CR 指数理論を併用する事により、存在が示された不動点の双曲性・局所一意性が検証できる事を示す。詳しい検証結果は、ホームページ `http://kmatsue.web.fc2.com` にも記載してあるので、興味のある方はご覧いただきたい。

参考文献

[1] J.K.Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**. AMS, Providence, 1988.

[2] 中尾 充宏, 山本 野人, 「精度保証付き数値計算」, 日本評論社, 1994.

[3] K.P.Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1987.

[4] P.Zgliczyński and K.Mischaikow, Rigorous numerics for partial differential equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* **1**(2001), 255–288.

Global existence of solutions to Schrödinger equations on compact Riemannian manifolds below H^1

Sijia Zhong

November 16, 2010

In this talk, we will study global well-posedness for the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equations on the compact Riemannian manifold without boundary, below the energy space, i.e. $s < 1$, under some bilinear Strichartz assumption. We will find some $\tilde{s} < 1$, such that the solution is global for $s > \tilde{s}$, here

$$\tilde{s} = \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})s_0,$$

and s_0 is the index of bilinear Strichartz assumption.

We will use the I-method to imitate the H^1 argument with the energy, i.e. apply some smoothing operator to improve the regularity of the solution u, so that it makes sense for energy. However, the modified energy isn't conserved any more, so the crucial point is to estimate the growth of the energy. But, contrarily from the $\mathbb{R}^2$ case, the Fourier transformation couldn't be extended trivially. Although, we use eigenfunction expansion for the manifold, there are still some obstacles, especially for the case high-high-low-low eigenvalues. Hence, we need to localized the function to some coordinate patch, and use some semiclassical analysis tools to deal with it.

Keywords: Schrödinger equation; compact Riemannian manifold; global; I-method.

楕円型偏微分方程式の解の数値的検証法について

木下武彦
京都大学数理解析研究所
Email: kinosita@kurims.kyoto-u.ac.jp

キーワード：楕円型偏微分方程式，数値的検証法，精度保証付き数値計算

1 はじめに

本講演は [1] で提案された非線形楕円型偏微分方程式に対する解の存在条件を紹介する．この存在条件が満たされるかそうでないかは計算機を用いて証明する事ができる．この様な計算機を用いて証明すべき条件を検証条件と呼び，検証条件が成立することで解の存在性を証明する手法を数値的検証法 (numerical verification method)，または計算機援用証明 (computer-assisted proof) 等と呼ぶ．また，計算機による近似解と厳密解との誤差が評価できるので精度保証付き数値計算 (validated computation) と呼ぶ事もある．

2 検証原理

$\Omega \in \mathbb{R}^d$, $(d = 1,2,3)$ を有界領域とする．$f : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を Fréchet 微分可能な非線形関数とする．このとき，次の方程式

$$\begin{cases} -\triangle u = f(u), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

の弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の存在条件について考える．適当な u_h に対して (1) の線形化作用素を $\mathscr{L} := -\triangle - f'(u_h)$ と置く．このとき，(1) の解 u の存在と局所一意性は次の 3 つの条件で得られる．

1. $\mathscr{L}^{-1}$ の存在を証明し，$\left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|$ の評価を行う．
2. (1) と同値な不動点方程式 $w = \mathscr{L}^{-1}\big(f(w+u_h) - f'(u_h)w + \triangle u_h\big)$ を満たす $w \in H_0^1(\Omega)$ の存在条件を Schauder の不動点定理から求める．
3. $\mathscr{L}^{-1}\big(f(w+u_h) - f'(u_h)w + \triangle u_h\big)$ が原点近傍で縮小的になる条件を求める．

w は u と u_h との誤差に対応する量であり，u_h が u に十分近ければ w は小さな量であると期待できる．講演では 1 から 3 の検証条件を具体的に求め，幾つかの検証例を紹介する．

参考文献

[1] M.T. Nakao, K. Hashimoto and Y. Watanabe, A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems, *Computing*, **75** (2005), 1–14.

Stability Analysis for a Class of Equilibria of the Free Rigid Body on $\mathfrak{so}(n)$

多羅間 大輔*

本講演は，Tudor Ratiu 先生（EPFL）との共同研究 [1] に基づく．本講演で取り扱うのは，$\mathfrak{so}(n)$ 上の自由剛体の力学系のあるクラスの平衡点の安定性である．$\mathfrak{so}(n)$ 上の自由剛体とは，解析力学でよく知られた 3 次元自由剛体の自然な一般化であって，簡単に言えば，以下に示すような一階常微分方程式で記述される力学系である：

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}M = [M, \Omega]. \tag{1}$$

ここで，$M, \Omega \in \mathfrak{so}(n)$ は時間に依存しない対称行列 J によって，$M = \mathsf{J}\Omega + \Omega\mathsf{J}$ なる線形な関係で結ばれている．別の見方では，方程式 (1) は，双対空間 $\mathfrak{so}(n)^*$ の Lie-Poisson 構造に関する Hamilton 函数が $H(M) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\Omega)$ であるような Lie-Poisson 力学系ともいえる．このような，$\mathfrak{so}(n)$ 上の自由剛体が A. S. Mishchekno，L. A. Dikii，S. V. Manakov 等によって導入されてから四半世紀以上たっているが，これまでの研究はほとんどが Euler 方程式 (1) の完全積分可能性に関するものであった．実際，よく知られた力学系の簡約の手続きを踏むことで，Euler 方程式 (1) は $\mathfrak{so}(n)$ の随伴軌道上の Hamilton 力学系の Hamilton 方程式とみなせることが知られており，この随伴軌道上の Hamilton 力学系が一般には完全積分可能となることが知られている．一方で，$\mathfrak{so}(n)$ 上の自由剛体に関して，その平衡点の（Lyapunov）安定性については，あまり研究されてこなかった．そこで，本講演では $\mathfrak{so}(n)$ 上の自由剛体の平衡点のうちあるクラスをとりあげ，その安定性解析を実行した結果についてご報告させていただく．なお，一般性を失うことなく J は対角行列であるとしてよく，本講演でもそのように仮定し，さらにその対角成分は互いに異なるとする．

本講演で取り扱う平衡点は，以下のような座標型 Cartan 部分代数に含まれるものである．まず，$\mathsf{E}_{jk} \in \mathfrak{so}(n)$ で $n \times n$ 歪対称行列であって，(j,k)-成分に 1，(k,j)-成分に -1 が入り，そのほかの成分がすべて 0 となるようなものをあらわすとする．ただし，$1 \leq j < k \leq n$ とする．$\mathfrak{so}(n)$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ が座標型 Cartan 部分代数とは，$\mathfrak{h}$ の生成系として，集合 $\{E_{jk} | 1 \leq j < k \leq n\}$ の部分集合が取れるようなときをいう．標準的な Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_0 = \left\{E_{2k-1,2k} | k = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}]\right\}$ は座標型 Cartan 部分代数の典型例でもある．実は，座標型 Cartan 部分代数のすべての元は Euler 方程式の平衡点であることが証明できる．講演では，任意の座標型 Cartan 部分代数と標準的 Carten 部分代数 $\mathfrak{h}_0$ との関係や，上に述べた Euler 方程式 (1) の完全積分可能性とのかかわりについても述べる．

次に，Euler 方程式 (1) の平衡点 $M \in \mathfrak{so}(n)$ まわりでの線形化方程式を考える．ただし，Euler 方程式 (1) は M を通る随伴軌道 $\mathcal{O}_M$ 上の Hamilton 力学系とみなしている．随伴軌道 $\mathcal{O}_M$ 上の軌道シンプレクティック形式（Kirillov-Kostant-Souriau 形式）ω をとると，線形化方程式は

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}P = \omega(M)^{-1}\left(D^2H|_{\mathcal{O}_\mathcal{M}}(M)\right)P \tag{2}$$

のようになる．ただし，$P \in T_M(\mathcal{O}_M)$ は随伴軌道の M での接ベクトルであり，$D^2H|_{\mathcal{O}_M}(M)$ は Hamilton 函数 H の随伴軌道 $\mathcal{O}_M$ への制限の平衡点 M での Hesse 行列である．

そこで，線形化方程式 (2) の右辺に現れる行列 $\omega(M)^{-1}\left(D^2H|_{\mathcal{O}_\mathcal{M}}(M)\right)$ の固有値を考え，線形安定性を調べることが，Euler 方程式の安定性解析の第一歩となる．本講演では，座標型 Cartan 部分代数に含まれるような平衡点に関して，線形安定性の条件を計算した結果についてお話しする．また，いくつかの場合には Lyapunov 安定性の条件も得られているので，それについてもお話させていただく予定である．

References

[1] T. S. Ratiu and D. Tarama, Stubility analysis for a class of equilibria of the free rigid body on $\mathfrak{so}(n)$, preprint.

*京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻, JSPS Research Fellow, E-mail: dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp

定常状態輸送方程式の数値解法について

桂 幸納

Nov.29 - Dec.2, 2010

Graduate School of Informatics, Kyoto University,
Kyoto, 606-8501 Japan
E-mail: **katsura@acs.i.kyoto-u.ac.jp**

Abstract

MRI や X 線 CT に次ぐ新たな医用画像化技術として実用化が期待されている技術に，可視光や近赤外光を用いて断層画像を撮影する光トモグラフィがある．生体内での光の伝播は，輸送方程式という微分積分方程式によって光子の密度として記述されると言われており，光トモグラフィは，数学的には輸送方程式の逆問題として定式化されている．しかしながら，モデル方程式，特に輸送方程式において光の散乱を記述している積分核については十分検証されているとは言い難いのが現状である．本研究では，輸送方程式モデルの妥当性の検証とその逆問題解析に向けた第一歩として，順問題の数値シミュレーション手法の確立を目指している．本講演では，今回用いた計算スキームの収束性の証明や積分核の摂動が解に与える影響について数値シミュレーションした結果等の紹介を行いたい．

References

[1] Alexander D. Klose and Edward W. Larsen, 2006, Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonic equations, *J. Comp. Phys.* , **220**, 441–470.

[2] Alexander D. Klose, Uwe Netz, Jurgen Beuthan, Andreas H. Hielscher,2002, Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer - Part 1: forward model, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **72** 691–713.

[3] Kui Ren, Guillaume Bal and Andreas H. Hielscher, 2007, Transport- and diffusion-based optical tomography in small domains: a comparative study, *Appl. Opt.* , **46**, 6669–6679.

離散可積分系と固有値問題

三木　啓司*
京都大学情報学研究科
*Email: miki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

キーワード : 直交関数系, 歪直行多項式, (離散) 可積分系, (一般化) 固有値問題

概要

代表的な古典可積分系の例として知られる有限格子における戸田方程式

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 0, \cdots, N-1), \\
&\dot{b}_n = b_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 1, \cdots, N-1), \\
&b_0 = b_N = 0
\end{aligned}$$

の可積分な離散化として, 有限格子における離散時間戸田方程式

$$\begin{aligned}
&A_n(t+1) + B_n(t+1) = A_n(t) + B_{n+1}(t). \quad (n = 0, \cdots, N-1), \\
&A_{n-1}(t)B_n(t) = A_n(t)B_n(t) \quad (n = 1, \cdots, N-1), \\
&B_0(t) = B_N(t) = 0
\end{aligned}$$

がある. この方程式は N 次三重対角行列向けの固有値計算アルゴリズムである qd-アルゴリズムと等価であることが知られている. また, 半無限格子上での可積分系と直交関数系との繋がりも知られており, この場合戸田方程式に対して直交多項式が対応している.

この点に着目して, 近年, 直交関数系に対応する離散可積分系を導入し, ある行列のクラスに対する固有値 · 特異値を計算するアルゴリズムを構成する研究が行われている. 主な成果として, 高速高精度で高信頼性を持つ特異値計算アルゴリズムである mdLVs 法がある. この背景には対称な直交多項式の理論が潜んでいる.

本発表ではまず上記のことについて具体的に説明する. そして, 最後に, 直交関数系の中でもランダム行列の理論で導入された歪直交多項式に着目する. 歪直交多項式のとあるクラスがある対称性をもった一般化固有値問題と関連することを示し, その一般化固有値の計算法について説明する.