第10回白浜研究集会

開催期間: 2018 年 11 月 26 日 (月)–11 月 29 日 (木)
開催場所: 紀州・白浜温泉 旅館むさし

プログラム

11 月 26 日 (月)

14:50–15:00 開会の挨拶

15:00–15:40 伊縫 寛治（京都大学大学院 人間・環境学研究科 D2）
一般化複素連分数展開に関する等角反復関数系の極限集合の次元と測度

15:50–16:30 渡邉 天鵬（京都大学大学院 人間・環境学研究科 D1）
Markov random dynamical systems

16:40–17:00(SC) 岡田 晃（京都大学大学院 人間・環境学研究科 D1）
Characterization of initial data for exitence of solution in the Serrin class to the Navier–Stokes equations

11 月 27 日 (火)

09:30–10:10 寺本 有花（九州大学 数理学府 D2）
The time periodic solution of artificial compressible system

10:20–11:00 中島 由人（京都大学大学院 人間・環境学研究科 M2）
正四面体に関連したフラクタル図形

11:10–11:40 浜野 大（埼玉大学大学院理工学研究科 D1）
ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の挙動について

昼

14:00–14:40 豊田 洋平（大阪大学大学院 基礎工学研究科 D3）
2D Trudinger-Moser inequality for Boltzmann–Poisson equation with continuously distributed multi-intensities

14:50–15:30 青木 和貴（大阪大学大学院 理学研究科 D2）
Global existence of small solutions for the quadratic nonlinear fourth-order Schrödinger equation in six space dimensions

Tea Time

15:50–16:30 佐川 侑司（大阪大学大学院 理学研究科 D3）
非線形シュレディンガー方程式系の解のライフスパンの評価

16:40–17:00(SC) 河東塩子（京都大学大学院 理学研究科 M2）
Fractional Laplacian

11 月 28 日 (水)

09:30-10:10 迫田 大輔（大阪大学大学院 理学研究科 D2）
空間2次元における微分型非線形Schrödinger方程式系の時間大域解の存在について

10:20–11:00 植田 優基（北海道大学大学院理学院 D2）
Tensoring quantum channels with the completely depolarizing channel

11:10–11:50 野場 啓（京都大学大学院 理学研究科 D3）
一般化スケール関数と屈折過程について

昼

14:00–14:40 吉野 将旭（京都大学大学院 理学研究科 D2）
3次元閉多様体上のDirac型特異点を持つモノポールのL2-指数定理

14:50–15:30 山本 拓人（京都大学大学院 理学研究科 D1）
連立系非線形 Schrödinger 方程式に関するランダム化終値問題

Tea Time

15:50–16:30 蘆田 聡平（京都大学数理解析研究所 研究員）
精度保証付き数値計算による電子のハミルトニアンの固有値の正確な下界評価

16:40–17:00(SC) 西井 良徳（大阪大学大学院 理学研究科 M2）
半線形波動方程式系に対する Agemi 型の構造条件について

11 月 29 日 (木)

09:30–10:10 田中 智之（名古屋大学大学院多元数理科学研究科・中央大学理工 学部 D1）
Local well-posedness of the third order Benjamin–Ono equation on the torus

10:20–11:00 石川 寿雄（京都大学大学院 理学研究科 D2）
多重並列ミニマル平面 Couette 乱流に対する Lyapunov 解

11:10–11:30(SC) 本永 翔也（京都大学大学院 情報学研究科 D1）
摂動系における周期軌道，第一積分および可換なベクトル場の非保存

11:40–12:00(SC) 加藤 勲（京都大学大学院 理学研究科 特定研究員）
Local well-posedness for the Cauchy problem of the Zakharov type system

12:00–12:10 閉会の挨拶

一般化複素連分数展開に関する等角反復関数系の極限集合の次元と測度

伊縫 寛治* 京都大学大学院人間・環境学研究科 博士後期課程 2 年

キーワード：確率論, エルゴード理論, フラクタル

概要

Cantor set や Sierpiński gasket などを含む多くのフラクタルは有限個の縮小写像による反復関数系 (以後 IFS と記す) の極限集合として定義され, よく研究されてきた ([1]). しかし近年, Mauldin, Urbański の 2 人により可算無限個の縮小写像による等角 IFS(以後 CIFS と記す) の極限集合に関する研究 ([2], [3]) が始まった. 特に彼らはハウスドルフ次元に対応するハウスドルフ測度が 0 であるが, ハウスドルフ次元に対応するパッキング測度が正であるような性質を持つ極限集合を構成した. この性質は有限個の縮小写像による CIFS の極限集合では起こりえない性質である. 本講演では, 上記の極限集合を基に複素平面上の部分集合によってパラメーター化された可算無限個の縮小写像による CIFS の族を考え, その CIFS の族に対応するハウスドルフ次元 (関数) とハウスドルフ測度に関する結果を紹介する. またこの研究は角大輝教授 (京都大学人間・環境学研究科) との岡田熙氏 (大阪大学理学研究科) との共同研究である.

定義と主結果

以下が本講演に関する定義と主結果である.

定義 1. $A_0 := \{\tau = u + iv \in \mathbb{C} | u \geq 0 \text{ and } v \geq 1\}$, $X := \overline{B(1/2, 1/2)} (\subset \mathbb{C})$ とする.

このとき, $\tau \in A_0$ に対し, $S_\tau := \{\phi_{m+n\tau} \colon X \to X | m, n \in \mathbb{N}\}$ と定め, 一般化複素連分数展開に関する CIFS と呼ぶ. ここで, $b \in \mathbb{C}$ に対し, $\phi_b(z) := 1/(z + b)$ $(z \in X)$ である. また, $\{S_\tau\}_{\tau \in A_0}$ を一般化複素連分数展開に関する CIFS の族と呼ぶ. また, J_τ を S_τ に関する極限集合, h_τ を J_τ に関するハウスドルフ次元とそれぞれ記す.

定理 1. J_τ, h_τ を定義 1 の通りとする. このとき以下が成立する.

1. $\tau \in A_0$ に対し, $1 < h_\tau < 2$ である. さらに, $h_\tau \to 1$ $(\tau \in A_0, \tau \to \infty)$ が成立する.
2. 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ は A_0 上連続であり, A_0 の内部で実解析的かつ劣調和である. 特に, $\tau \mapsto h_\tau$ は最大点を持ち, その最大点は A_0 の境界に属する.
3. $\tau \in A_0$ に対し, $\mathcal{H}^{h_\tau}(J_\tau) = 0$, $\mathcal{P}^{h_\tau}(J_\tau) > 0$ である. ここで, $s \geq 0$ に対し, $\mathcal{H}^s$, $\mathcal{P}^s$ はそれぞれ s 次元ハウスドルフ測度, s 次元パッキング測度を表す.

参考文献

[1] J. Hutchinson, Fractals and Self-Similarity, Indiana Univ. Math. J. **30**, no. 5, (1981), pp.713–747.

[2] R. D. Mauldin, M. Urbański, Dimensions and measures in infinite iterated function systems, Proceedings of the London Mathematical Society, **73**, no. 1, (1996), pp.105–154.

[3] R. D. Mauldin, M. Urbański, Conformal iterated function systems with applications to the geometry of continued fractions, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, no. 12, (1999), pp.4995–5025.

[4] M. Roy, M. Urbański, Regularity properties of Hausdorff dimension in infinite conformal iterated function systems, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25**, no. 6, (2005), pp.1961–1983.

*inui.kanji.43a@st.kyoto-u.ac.jp

Markov random dynamical systems

渡邉天鵬(たかゆき)* 京都大学大学院人間・環境学研究科

キーワード：ランダム複素力学系，マルコフ連鎖，フラクタル，ジュリア集合

ランダム複素力学系の研究は 90 年代に始まり，決定論的な力学系では起こらない**ランダム性誘起現象**が発見されるなど，大変興味深い対象であることがわかってきた．今まで知られていたランダム性誘起現象は独立同分布のランダム性を扱ったものがほとんどであったが，本講演では独立同分布でないランダム性，特に**マルコフ連鎖のように過去の履歴へ依存するランダム性**を扱う．本講演は京都大学の角大輝氏との共同研究 [2] に基づく．

設定と主定理

Poly を 2 次以上の複素係数多項式全体の集合とする．各 $f \in \mathrm{Poly}$ をリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像と見て，Poly に一様収束位相を入れる．

設定． $m \in \mathbb{N}$ とし，Poly 上の m^2 個の測度 $\tau_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, m)$ が次を満たすとする: $p_{ij} = \tau_{ij}(\mathrm{Poly})$ とすると

- 任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$,
- $P = (p_{ij})_{i,j}$ が既約行列，つまりある $N \in \mathbb{N}$ が存在して P^N の各成分が正．

このとき，$\widehat{\mathbb{C}} \times \{1, \cdots, m\}$ 上の点 (z, i) から $B \times \{j\}$ への遷移確率が

$$\mathbb{P}\left((z, i), B \times \{j\}\right) = \tau_{ij}(\{f \in \mathrm{Poly} \colon f(z) \in B\})$$

であるマルコフ連鎖を考える．ここで，B は $\widehat{\mathbb{C}}$ のボレル集合，$j \in \{1, \cdots, m\}$ である．

定理 ([2])**．** 初期値 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ のランダム軌道が ∞ に収束する確率を $T_{\infty,\tau}(z_0)$ と書くと，関数 $T_{\infty,\tau} \colon \widehat{\mathbb{C}} \to [0, 1]$ は適当な条件のもとで連続になる．さらに，独立同分布の場合と比べて，独立同分布でないときに $T_{\infty,\tau}$ はより多様な振る舞いをする．

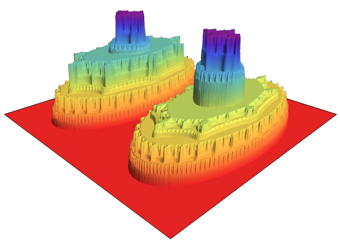


図 1: $1 - T_{\infty,\tau}$ のグラフ

参考文献

[1] H. Sumi, Random complex dynamics and devil's coliseums. Nonlinearity 28 (2015), 1135-1161.
[2] H. Sumi and T. Watanabe, Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity. preprint, `https://arxiv.org/abs/1810.09922`

*watanabe.takayuki.43c@st.kyoto-u.ac.jp

Characterization of initial data for exitence of solution in the Serrin class to the Navier-Stokes equations

岡田　晃* 京都大学 人間・環境学研究科

キーワード：偏微分方程式，Navier-Stokes 方程式

次の非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を考察する．

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \ \mathrm{div}\ u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = a(x) & \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{NS}$$

ここで $u(x,t)$ は流速，$p(x,t)$ は圧力，$a(x)$ は初期流速を表す．方程式を不変にするスケーリングに対して不変な関数空間をスケール不変な空間という．スケール不変な空間で解を考察することの重要性は経験的に知られており，これを Fujita-Kato の原理という．Kato [?] をはじめとして，Giga-Miyakawa, Kozono-Yamazaki, Cannone-Planchon，Koch-Tataru らによって，より広い初期値に対して解が構成されている．これらの研究とは逆に，解が存在するための初期値の必要条件を考える．本講演では Serrin クラスの時間大域解が存在するための初期値の optimal なクラスがスケール不変な斉次 Besov 空間であることを示す．本講演は小薗英雄教授 (早稲田大学)，清水扇丈教授 (京都大学) との共同研究に基づく．

定理 1 (十分条件)**.** *Let $n < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. There exist $\delta = \delta(n,p,q) > 0$ such that if $a \in \dot{B}^{-1+n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ satisfies*

$$\|a\|_{\dot{B}^{-1+n/p}_{p,q}} \le \delta,$$

then there exists a unique mild solution

$$u \in L^{\alpha,q}(0,\infty; \dot{B}^0_{r,1})$$

for all $p \le r \le \infty$ and $2 \le \alpha < \infty$ satisfying $\frac{2}{\alpha} + \frac{n}{r} = 1$.

定理 2 (必要条件)**.** *Let $a \in \mathcal{S}'$. Suppose that*

$$u \in L^{\alpha,q}(0,\infty; L^r)$$

for some $n < r \le \infty$, some $2 \le \alpha < \infty$ satisfying $\frac{2}{\alpha} + \frac{n}{r} = 1$, and for some $1 \le q \le \infty$. Then it holds that $a \in \dot{B}^{-1+n/r}_{r,q}(\mathbb{R}^n)$.

参考文献

[1] Kato, T., Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.* 187 (1984), no. 4, 471-480.

*okada.akira.75m@st.kyoto-u.ac.jp

The time periodic solution of artificial compressible system

寺本 有花* 九州大学 大学院数理学府

キーワード：非圧縮 Navier-Stokes 方程式，人工圧縮系，Hopf 分岐

$\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界をもつ有界領域 Ω において次の人工圧縮系を考える．

$$\epsilon^2 \partial_t p + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{g}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_*. \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{v} = {}^\top(v^1(x,t), \cdots, v^n(x,t))$, $p = p(x,t)$ は，位置 $x \in \Omega$，時刻 $t \geq 0$ における流速ベクトル，圧力を表し，$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(x)$ は与えられた外力, $\boldsymbol{v}_*$ は $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}_* \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$ を満たす与えられた境界データである．ν は粘性係数であり，正定数であるとする．(1) における $\epsilon > 0$ は小さいパラメータ（人工マッハ数）である．$\epsilon = 0$ の極限で非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (1)-(3)$|_{\epsilon=0}$ が得られるが，この極限は特異極限である．人工圧縮系 (1)-(3)$|_{\epsilon>0}$ は非圧縮流の数値計算において用いられている．

昨年の講演では，安定な非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解が人工圧縮系でも安定になるための十分条件を与え，その応用として Taylor 問題を考えた．この講演では，非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して Hopf 分岐が起こるとき，ある条件下では十分小さい ϵ に対して人工圧縮系でも Hopf 分岐が起こることを示す．さらに，非圧縮 Navier-Stokes 方程式の分岐時間周期解が安定ならば，人工圧縮系の分岐時間周期解も安定であることを示す．

η を分岐パラメータとし，基本流 $\boldsymbol{v}_\eta$ 周りの非圧縮 Navier-Stokes 方程式の線形化作用素を

$$\mathbb{A}_\eta = -\mathbb{P}\Delta + (\mathcal{R}_c + \eta)\mathbb{P}\mathbb{M}(\boldsymbol{v}_\eta, \cdot)$$

とする．ここで $\mathbb{P}$ は Helmholtz 射影，$\mathcal{R}_c$ は臨界 Reynolds 数，$\mathbb{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ である．以下のような仮定をする．

仮定 正定数 η_0，b_0 が存在し，$|\eta| \leq \eta_0$ のとき

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\, \operatorname{Re}\lambda \geq -b_0 |\operatorname{Im}\lambda|^2 - \Lambda_0\} \backslash \{\lambda_+(\eta), \lambda_-(\eta)\} \subset \rho(-\mathbb{A}_\eta).$$

ここで $\lambda_+(\eta)$，$\lambda_-(\eta)$ は $-\mathbb{A}_\eta$ の単純固有値であり，$\lambda_-(\eta) = \overline{\lambda_+(\eta)}$,

$$\lambda_+(0) = ia,\ \frac{d\operatorname{Re}\lambda_+}{d\eta}(0) > 0.$$

を満たす．ここで a は正定数; $\boldsymbol{w}_+$ は $-\mathbb{A}_0$ の固有値 ai に対する固有関数で $\mathbb{A}_\eta^{(1)} = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta}(\mathbb{A}_\eta - \mathbb{A}_0)$．これにより，単純固有値 $\lambda_+(\eta)$ と $\lambda_-(\eta)$ が左から右に虚軸を通過することがわかる．

以上の仮定の下，次が成立する．

定理 1. ϵ が十分小さいとき，$\exists \mathcal{R}_{c,\epsilon} = \mathcal{R}_c + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ *s.t.* $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{c,\epsilon}$, $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{c,\epsilon}$ に対して (1)–(3) は $\boldsymbol{v}_\eta$ からの分岐時間周期解を持つ．

* y-teramoto@math.kyushu-u.ac.jp

正四面体に関連したフラクタル図形

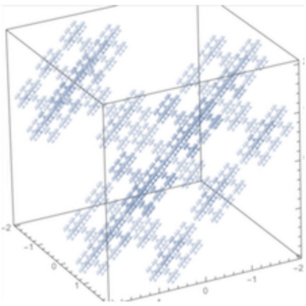
中島由人* 京都大学 人間・環境学研究科

キーワード：フラクタル、正四面体、イマジナリーキューブ、力学系

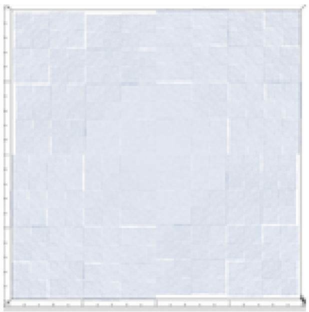
背景と内容

2008 年に Bandt の導入した正 n 角形に関連したフラクタルであるフラクタル正 n 角形 ([1]) は、それに付随したマンデルブロ集合 $\mathcal{M}_n$ の位相的性質と共に研究されてきた。本講演ではフラクタル正 n 角形の三次元への自然な拡張概念である正多面体に関連したフラクタルのうち、一番シンプルに思われる正四面体に関連したフラクタルについて紹介する。

フラクタル正四面体 (以下 frt と書く) という自己相似集合を導入する。frt は縮小率 $c \in (0,1)$ と回転行列 $P \in SO(3)$ でパラメトライズされるが、まずいつ正四面体と同じ回転対称性を有するのかという問題を考察する。そして正四面体と同じ回転対称性を与えるパラメータ集合のうち、$[1/2,1) \times P_6$ における frt をイマジナリーキューブ ([2]) で特徴付ける (ただし、P_6 は正六面体群である)。イマジナリーキューブとは、互いに直行する方向から光を当てた時にできる影が全て同じ正方形になる三次元空間内の図形を指し、非自明な例としては三次元シルピンスキーガスケットが挙げられる。次に frt が連結になるパラメータ集合 (ここでは単にマンデルブロ集合と呼ぶことにする) を考察する。フラクタル正 n 角形においては、それ自体に備わった都合の良い回転対称性が $\mathcal{M}_n$ をランダム複素係数多項式の根で特徴付けることにより解析を容易くする一方、frt はピース達の交わり具合が複雑で一般の回転におけるマンデルブロ集合を考察するのは困難である。したがって問題を簡単にするため特に z 軸周りの回転に限ったマンデルブロ集合を考察する。



c=1/2,P を z 軸周り 90 度回転としたときのフラクタル正四面体



左の図を上から ((0,0,20) から) 見た図

参考文献

[1] C. Bandt and N. V. Hung, *Fractal n-gons and their Mandelbrot sets*, Nonlinearity 21(2008), 2653-2670.

[2] H. Tsuiki, *Imaginary cubes-objects with three square projection images*, In: Proceedings of Bridges 2010, Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, Tessellations Publishing, Phoenix, Arizona (2010), 159-166.

*nakajima.yuuto.32n@st.kyoto-u.ac.jp

ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の挙動について

浜野 大* 埼玉大学大学院理工学研究科

キーワード：非線形シュレディンガー方程式, ポテンシャル, 散乱解, 爆発解

本講演の内容は理化学研究所の池田正弘氏との共同研究に基づく.
本講演では次のポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式を空間 3 次元で考える.

$$(\mathrm{NLS}_V)\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - Vu = -|u|^{p-1}u, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}$$

ここで, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{C}$ は解で未知関数, $u_0:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{C}$ は初期値で既知関数, $V:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{C}$ はポテンシャルで既知関数, $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位, $\Delta=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンである.

(NLS_V) は次の保存量をもつ.

- (質量) $M[u]=\int_{\mathbb{R}^3}|u(t,x)|^2dx$,
- (エネルギー) $E_V[u]=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u(t,x)|^2+V(x)|u(t,x)|^2dx-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|u(t,x)|^4dx$.

初期値 u_0, ポテンシャル V の与え方により (NLS_V) の解の挙動は変化する. 例えば, 散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解などが存在する. Holmer–Roudenko [2] はポテンシャルをもたない非線形シュレディンガー方程式 $(V=0)$,

$$i\partial_t u+\Delta u=-|u|^2u$$

において $M[u_0]E_0[u_0]<M[Q]E_0[Q]$, $u_0\in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)$ の条件の下, 散乱解と有限時間爆発解を導く初期値の条件を完全に明らかにした, ここで, Q は $-Q+\Delta Q+Q^3=0$ の解である. 最近, Dodson–Murphy [1] により散乱解を導く議論に関して別証明が与えられた. しかしながら, 彼らの議論には不明瞭な部分があるように思われた. 本講演では Dodson–Murphy の議論を補正し, (NLS_V) に応用することで散乱解を導く初期値とポテンシャルの十分条件を与える. また, 有限時間爆発または無限時間爆発解, 有限時間爆発解を導く初期値とポテンシャルの十分条件も紹介する.

参考文献

[1] B. Dodson and J. Murphy, *A new proof of scattering below the ground state for the 3D radial focusing cubic NLS. Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2017), no. 11, 4859–4867.

[2] J. Holmer and S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation. Comm. Math. Phys.* **282** (2008), no. 2, 435–467.

*m.hamano.733@ms.saitama-u.ac.jp

2D Trudinger-Moser inequality for Boltzmann-Poisson equation with continuously distributed multi-intensities

豊田 洋平 * 大阪大学 基礎工学研究科

キーワード：楕円型方程式, 変分法, 爆発解析

本講演は大阪大学 (MMDS) の鈴木貴氏との共同研究に基づく．本稿では次の確率測度を有する汎関数について考察する．

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \lambda \int_{I_+} \log\Big(\int_\Omega e^{\alpha v} dx\Big) \mathcal{P}(d\alpha), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし, λ は正の定数で, $\mathcal{P}(d\alpha)$ は区間 $I_+ = [0,1]$ で定義されたボレル確率測度とする．また変分構造という観点から次の方程式は汎関数 $J_\lambda(\cdot)$ のオイラー・ラグランジュ方程式となることに注意する．

$$-\Delta v = \lambda \int_{I_+} \frac{\alpha e^{\alpha v}}{\int_\Omega e^{\alpha v} dx} \mathcal{P}(d\alpha) \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{1}$$

すなわち, 方程式 (1) の解の存在性は, 汎関数 $J_\lambda(\cdot)$ の臨界点の有無に帰着される．特に汎関数 $J_\lambda(\cdot)$ の臨界点を考察する上では, 最小化達成関数 (ミニマイザー) の存在は重要である．そこでパラメータ λ に対する臨界パラメータを次のように定義する．

$$\overline{\lambda} := \sup\Big\{\lambda > 0 \mid \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J_\lambda(v) > -\infty\Big\}.$$

この $\overline{\lambda}$ の定義から, $\lambda < \overline{\lambda}$ では $J_\lambda(\cdot)$ は下に有界で, $\lambda > \overline{\lambda}$ では $J_\lambda(\cdot)$ は下に非有界である．特に $\lambda < \overline{\lambda}$ の場合は, $J_\lambda(\cdot)$ のミニマイザーが存在することに注意する．

ここで 2 つの問題点が浮かび上がる．1 つは臨界パラメータでの汎関数 $J_{\overline{\lambda}}(\cdot)$ の $H_0^1(\Omega)$ 上での有界性で, 2 つ目は $J_{\overline{\lambda}}(\cdot)$ のミニマイザーの存在性である．

2 つ目の問題に対しては一般には否定的である．実際, $\mathcal{P}(d\alpha) = \delta_1(d\alpha)$ とすると, $\overline{\lambda} = 8\pi$ であり, このとき領域 Ω が球状であれば, $J_{8\pi}(\cdot)$ のミニマイザーは存在しないことが知られている [1]．一方で, 一つ目の問題に対しては肯定的であると予想される．実際, $\mathcal{P}(d\alpha)$ が離散的である場合には, $\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J_{\overline{\lambda}}(v) > -\infty$ が示されている [2]．本講演ではいくつかの仮定の下で, $\mathcal{P}$ が連続の場合に汎関数 $J_{\overline{\lambda}}(\cdot)$ の下からの有界性に関する結果を報告する．

参考文献

[1] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro, M. Pulvirenti, *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys. **143** (1992) 501-525.

[2] I. Shafrir, G. Wolansky, The logarithmic HLS inequality for systems on compact manifolds. J. Funct. Anal. **227** (2005) 200-226.

*y-toyota@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

Global existence of small solutions for the quadratic nonlinear fourth-order Schrödinger equation in six space dimensions

青木 和貴 * 大阪大学 理学研究科

キーワード：非線形偏微分方程式，4 階シュレディンガー方程式

4 階非線形シュレディンガー方程式の初期値問題について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u - \frac{1}{4}\Delta^2 u = f(u,\overline{u}), & (t,x) \in (0,\infty)\times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

ここで i は虚数単位, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, \cdots, n)$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$, $u(t,x)$ は複素数値の未知関数, $\overline{u}$ は u の複素共役であり, $f(u,\overline{u})$ は冪乗型の非線形項を表す. 初期値 u_0 は適当な重み付き Sobolev 空間に属する既知関数とする.
4 階シュレディンガー方程式の線形解の $\mathbf{L}^\infty$ ノルムは $t^{-\frac{n}{4}}$ で減衰することが知られており, 非線形項の冪が $1+\frac{4}{n}$ を超える場合には小さい初期値に対する時間大域解の存在が期待される. また, 2 階シュレディンガー方程式の場合に [S] で用いられた線形解の $\mathbf{L}^p$ 時間減衰法を 4 階シュレディンガー方程式に応用すると, 非線形項の冪 p が $p_s(n) < p$ を満足するとき, 小さい初期値に対する時間大域解の存在が得られる. ただし

$$p_s(n) := \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{4}+\sqrt{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{4}{n}\right)}\right)$$

である. したがって我々の関心は $1+\frac{4}{n} < p \le p_s(n)$ の範囲における (1) の小さい初期値に対する時間大域解の存在を証明することにあり, 特に $p_s(6) = 2$ である.
4 階のシュレディンガー方程式の線形解の空間遠方で減衰する性質を応用することで, 次の定理が得られた.

定理 1. $n = 6$, $f(u,\overline{u}) = \lambda \overline{u}^2$ $(\lambda \in \mathbf{C})$ とする. $u_0 \in \mathbf{H}^{12} \cap \mathbf{H}^{9,1} \cap \mathbf{H}^{6,2} \cap \mathbf{H}^{3,3}$ を仮定すると, 次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する. $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{12}} + \|u_0\|_{\mathbf{H}^{9,1}} + \|u_0\|_{\mathbf{H}^{6,2}} + \|u_0\|_{\mathbf{H}^{3,3}} < \varepsilon$ ならば (1) の一意時間大域解 u が存在し $\mathcal{U}(-t)\,u \in \mathbf{C}([0,\infty) : \mathbf{H}^{12} \cap \mathbf{H}^{9,1} \cap \mathbf{H}^{6,2} \cap \mathbf{H}^{3,3})$ を満たす.

参考文献

[S] W. A. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41**, 110–133 (1981)

*k-aoki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

非線形シュレディンガー方程式系の解のライフスパンの評価

佐川 侑司 [*]　大阪大学 理学研究科

キーワード： 偏微分方程式, 漸近挙動

本講演では, 次の二波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の初期値問題:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2m_1}\partial_x^2 u = \lambda |v|^2 u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ i\partial_t v + \frac{1}{2m_2}\partial_x^2 v = \mu |u|^2 v, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (\varepsilon\varphi(x), \varepsilon\psi(x)), & x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

について考察する．ここで, $u=u(t,x)$,$v=v(t,x)$ は複素数値の未知関数, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ は初期値の大きさを表す十分小さな正のパラメータを表す．また $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ とし, $\varphi(x)$,$\psi(x)$ は $H^1 \cap H^{0,1}(\mathbb{R})$ に属する複素数値の既知関数とする．この設定の下で (1) の時間大域解が存在するかどうか, 存在しないならば, いつどのような特異性が生じるかということに興味がある．以下では関連する先行研究を述べる．始めに単独の非線形シュレディンガー方程式 $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = \lambda |u|^2 u$ について述べる．空間 1 次元で 3 次の非線形項を伴うシュレディンガー方程式は臨界的な状況となるため, 一般に非線形方程式を線形方程式の摂動とみなすことができない．実際 $\operatorname{Im}\lambda$ が 0 または負のとき, 時間大域解が存在し, 解は時刻無限大において線形解と異なる挙動をする ([1], [5])．一方で $\operatorname{Im}\lambda$ が正のとき, 解のライフスパンの下限についての漸近評価が得られた ([4])．しかし時間大域解の存在を示した結果は皆無である．次に非線形シュレディンガー方程式系について述べる．[2], [3] により, 方程式系の時間大域解が存在するための非線形項に関する十分条件が提唱された．例えば方程式系 (1) では, (i) $\operatorname{Im}\lambda < 0$, (ii) $\operatorname{Im}\mu < 0$, (iii) $\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\mu = 0$ のうち少なくとも 1 つが成り立つとき, (1) の時間大域解が存在する．一方で十分条件が成り立たない場合の結果は皆無であり, このとき時間大域解が存在するかどうかは分からない．

本研究の目的は『[2], [3] で提唱された十分条件が成り立たない場合, 時間大域解は存在するのだろうか？』という問いに答えることである．一般の方程式系について考察することは非常に難しいため, 方程式系 (1) の考察から始める．このとき, (iv) $\operatorname{Im}\lambda > 0$ かつ $\operatorname{Im}\mu = 0$, (v) $\operatorname{Im}\lambda = 0$ かつ $\operatorname{Im}\mu > 0$, (vi) $\operatorname{Im}\lambda > 0$ かつ $\operatorname{Im}\mu > 0$ の 3 つが考察の対象となる．今回は (vi) について研究を行い, 解のライフスパンの下限についての漸近評価を得ることができた．なお (iv), (v) については分かっていない．本講演ではそのことを話す．

参考文献

[1] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Amer. J. Math., **120** (1998), no.2, 369–389.

[2] D. Kim, Asymptotic Analysis, **98** (2016), no.1–2, 79–90.

[3] C. Li and H. Sunagawa, Nonlinearity, **29** (2016), no.5, 1537–1563.

[4] Y. Sagawa and H. Sunagawa, DCDS, **36** (2016), no.10, 5743–5761.

[5] A. Shimomura, Comm. Partial Differential Equations, **31** (2006), no.7–9, 1407–1423.

* y-sagawa@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Fractional Laplacian

河東塩子京都大学 理学研究科

キーワード：楕円型偏微分方程式，分数階微分

$$(P_\gamma) = \begin{cases} (-\Delta)^s u = F(x,u) := \dfrac{f(x)}{u^\gamma} \; in \; \Omega \\ u > 0 \; in \; \Omega \\ u = 0 \; in \; \mathbb{R} \setminus \Omega \end{cases}$$

$N > 2s,\ \gamma > 0, f$:nonnegative function
(P_γ) の解 u の存在と一意性を,

(1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:bounded smooth domain, $s = 1$
(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:bounded smooth domain, $0 < s < 1$
(3) $\Omega = \mathbb{R}^N,\ s = 1$
(4) $\Omega = \mathbb{R}^N,\ 0 < s < 1$

それぞれの場合について考える. (2) のとき, u の存在を次の $(P_{n,\gamma})$ を用いて示す.[1]

$$(P_{n,\gamma}) = \begin{cases} (-\Delta)^s u_n = \dfrac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \; in \; \Omega \\ u_n > 0 \; in \; \Omega \\ u_n = 0 \; in \; \mathbb{R} \setminus \Omega \end{cases}$$

$f \in L^1(\Omega),\ f \geq 0,\ f_n := \min(f(x), n)$
$(P_{n,\gamma})$ が非負の一意解 $u_n \in X_0^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ を持つことを示し, その極限が (P_γ) の解となることをいう.
これはもともと (1) の $s = 1$ の場合 [2] の証明に用いられていた手法だが, $0 < s < 1$ の場合でもこれを応用することができる. (1) から (2) への拡張方法および (3) の証明をもとに, (4) の場合の解 u の存在と一意性の証明を考える.

参考文献

[1] Begoña Barrios, Ida De Bonis, María Medina, *Semilinear problems for the fractional laplacian with a singular nonlinearity*, (2015), 390-406.

[2] M.G.Grandall, P.H.Rabinowitz, L.Tartar, *On a dirichlet problem with a singular nonlinearity*, (1977), 192-222

空間2次元における微分型非線形Schrödinger方程式系の時間大域解の存在について

迫田 大輔* 大阪大学 理学研究科

キーワード：零条件，Schrödinger 方程式

本講演は大阪大学の砂川秀明氏との共同研究に基づく．次の形をした非線形 Schrödinger 方程式系の，小さな初期値に対する解の時間大域存在について考える：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{m_j} u_j = F_j(u, \partial_x u), & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u_j(0,x) = \varphi_j(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $j \in I_N := \{1, \ldots, N\}$, $\mathcal{L}_{m_j} = i\partial_t + \frac{1}{2m_j}\Delta$, $i = \sqrt{-1}$ とし，$j \in I_N$ に対して $m_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ とする．$\varphi = (\varphi_j)_{j \in I_N}$ は与えられた $\mathbb{C}^N$-値の関数とし，$u = (u_j(t,x))_{j \in I_N}$ は $\mathbb{C}^N$-値の未知関数とする．また $\partial_x u = (\frac{\partial}{\partial x_a} u_j)_{a=1,2;\, j \in I_N}$ とし，$j \in I_N$ に対して非線形項 F_j は $(u, \partial_x u, \overline{u}, \overline{\partial_x u})$ についての斉2次多項式であるとする．

$\mathbb{R}^d$ 上の Schrödinger 方程式の長時間挙動を非線形摂動として考える際，F_j が $1 + \frac{2}{d}$ 次であれば臨界的な状況を与えることはよく知られている．つまり $\mathbb{R}^2$ 上では F_j が2次の非線形項であるときに臨界である．粗く言えば，このときは初期値をどれだけ小さく選んでも非線形項の効果を無視できず，解は非線形項から本質的な影響を受ける．

以下では表記を単純にするため，$N = 2$ として次のときを考える．

$$\begin{cases} F_1(u, \partial_x u) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} C_{1,\alpha,\beta} (\overline{\partial_x^\alpha u_1})(\partial_x^\beta u_2), \\ F_2(u, \partial_x u) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} C_{2,\alpha,\beta} (\partial_x^\alpha u_1)(\partial_x^\beta u_1). \end{cases} \tag{2}$$

また，$\xi = (\xi_j)_{j=1,2} \in \mathbb{R}^2$ とし，非線形項 F_j に対して次を定義する．

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} C_{1,\alpha,\beta} (\overline{im_1\xi})^\alpha (im_2\xi)^\beta, \\ \lambda_2(\xi) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} C_{2,\alpha,\beta} (im_1\xi)^\alpha (im_1\xi)^\beta. \end{cases}$$

本講演では，以下の2つの条件の下で (1)-(2) が小さい初期値に対して時間大域解が存在することを紹介する．

条件 (GI)：$2m_1 = m_2$.

条件 (WN)：ある正の数 κ が存在して，$\kappa\lambda_1(\xi) = \overline{\lambda_2(\xi)}$ が任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ で成立する．

参考文献

[1] M. Colin and T. Colin: Differ. Integral Equ. **17**(3-4), 297–330 (2004).

[2] N. Hayashi, C. Li and P.I. Naumkin: Differ. Integral Equ. **24**(5-6), 417–434 (2011).

[3] M. Ikeda, S. Katayama and H. Sunagawa: Ann. Henri Poincaré **16**, 535–567 (2015).

[4] C. Li and H. Sunagawa: Nonlinearity **29**, 1537–1563 (2016).

*d-sakoda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Tensoring quantum channels with the completely depolarizing channel

植田 優基[*] 北海道大学大学院理学院数学専攻

キーワード：量子チャネル，テンソルチャネル, Completely depolarizing チャネル

概要

複素成分の $n \times n$ 行列代数を M_n とかくことにする. 線型写像 $T : M_n \to M_n$ が単位的 $(T(1_n) = 1_n)$, 完全正 $(T \otimes I_k : M_n \otimes M_k \to M_n \otimes M_k$ が正) でトレース保測 $(\mathrm{Tr}_n \circ T = \mathrm{Tr}_n)$ であるとき, T を (有限次元量子力学系の) 量子チャネルとよぶ. 量子チャネルは量子力学系の状態変化を数学的に記述するものであり, 実用的には量子コンピューター上の入力状態系から出力状態系への通信路としての役割がある. Haagerup と Musat は Completely depolarizing チャネルと呼ばれる量子チャネルとのテンソル積をとったチャネルとユニタリチャネル ($x \mapsto u^*xu$ という表示をもった量子チャネル. ただし u は有限サイズのユニタリ行列) の凸線形表示との関係を調べることで, 量子情報理論における問題 Asymptotic Quantum Birkhoff Problem を否定的に解決し, 作用素環における重要未解決問題 Connes' Embedding Problem へのアプローチに成功した ([1]). 本講演では, 彼らの仕事について説明したあと, Completely depolarizing チャネルとのテンソルをとった量子チャネルが, ユニタリチャネルの凸線形表示をもった場合に, もともとの量子チャネルがどういう量子力学系へ分解をもつかについて述べる予定である.

定理 1 ([2])**.** $S_k : M_k \to M_k$ を *Completely depolarizing* チャネル *(*つまり, $S_k(x) := Tr_k(x)1_k$, $x \in M_k$ と定義される量子チャネル*)* とする. いま量子チャネル $T : M_n \to M_n$ に対して, テンソルチャネル $T \otimes S_k$ が以下のように表現されているとする.

$$(T \otimes S_k)(z) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i^* z u_i, \qquad u_i \in \mathcal{U}(n),\ \ \alpha_i > 0,\ \alpha_i \in \mathbb{Q},\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

このとき, ある自然数 L とユニタリ行列 $U \in M_n \otimes M_L$ が存在し, 次のように表される.

$$T(x) = (I_n \otimes Tr_L)(U^*(x \otimes 1_L)U), \qquad x \in M_n$$

参考文献

[1] U. Haagerup and M. Musat, *An asymptotic property of factorizable completely positive maps and the Connes embedding problem. Comm. Math. Phys.*, **338** (2015), no. 2, 721-752.

[2] Y. Ueda, *On tensors of factorizable quantum channels with the completely depolarizing channel, Adv. Oper. Theory* **3** (2018) no. 4, 807-815.

[*] yuuki1114@math.sci.hokudai.ac.jp

一般化スケール関数と屈折過程について

野場 啓* 京都大学 理学研究科

キーワード：周遊理論，スケール関数

X と Y を正の跳びを持たない標準過程とし, 正の値をとるとき X の, 負の値をとるとき Y の挙動をする確率過程 U のことを X と Y の**屈折過程**と呼ぶことにする. X と Y がいずれも Lévy 過程で X と Y の違いがドリフトのみの場合に, Kyprianou–Loeffen(2010) は屈折過程 U を, 確率微分方程式を用いて定義した. また, X と Y がいずれも正の跳びを持たない Lévy 過程で X と Y の Lévy 測度が異なり X がガウス部分を持たない場合について, Noba–Yano(arXiv, 2016, to appear) は屈折過程 U を周遊理論を用いて構成した. 本講演では一般の正の跳びを持たない標準過程 X と Y に対して, 屈折過程 U を**周遊理論**を用いて構成し, その性質を論じる.

X と Y を正の跳びを持たない標準過程で, それぞれ双対な過程 $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ を持つとする. $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ は負の跳びを持たない標準過程となるため, $\widehat{X}$ と $\widehat{Y}$ から屈折過程 $\widehat{U}$ を構成することができる. このとき, U と $\widehat{U}$ が双対の関係にあることは明らかではない. 本講演では, U と $\widehat{U}$ が双対であるための, U と $\widehat{U}$ の必要十分条件について論じる. その際, **一般化スケール関数**を用いる.

正の跳びを持たない Lévy 過程に対しスケール関数が存在して, 到達時刻の Laplace 変換や吸収壁ポテンシャル測度をスケール関数を用いて表わせることが知られている (詳しくは Kyprianou(2014) を見よ). 本講演では正の跳びを持たない Lévy 過程のスケール関数を, 正の跳びを持たない標準過程に拡張し, 一般化スケール関数と呼ぶことにする.

本講演は以下の二つの論文に基づいたものであり, 一般化スケール関数の定義, 屈折過程の構成, 屈折過程の双対問題について順に述べていく. 予稿では, 屈折過程の定義についてのみ述べる.

参考文献

[1] K. Noba, *Generalized scale functions of standard processes with no positive jumps*, arXiv:1711.08194.

[2] K. Noba, *Approximation and duality problems of refracted processes*, arXiv:1806.05433.

*knoba@math.kyoto-u.ac.jp

3次元閉多様体上のDirac型特異点を持つモノポールのL^2-指数定理

吉野 将旭[*] 京都大学大学院 理学研究科

キーワード：複素微分幾何, ゲージ理論, 偏微分方程式

背景と結果

Atiyah-Singerの指数定理は向き付き閉多様体上の楕円型偏微分作用素に対してそのFredholm指数が表象とトポロジカルな条件のみから決定される事を示した大定理であり微分トポロジーやゲージ理論, 複素幾何を含む幅広い分野で応用されてきた. しかしながら奇数次元の閉多様体上の楕円型偏微分作用素の指数は常に0となるので, 奇数次元においては閉でない多様体への拡張を考えることが重要となる.

(X,g)を向き付けられた3次元閉リーマン多様体, (V,h)をX上の階数$r>0$のHermiteベクトル束, Aを(V,h)上の接続でΦを(V,h)上の歪Hermiteなendomorphismとする. このとき, Bogomolny方程式$F(A) = -*\nabla_A(\Phi)$を満たすならば組(V,h,A,Φ)をモノポールと呼ぶ. さらに, 有限部分集合$Z\subset X$を除いた$X\setminus Z$上のモノポール(V,h,A,Φ)が各点$p\in Z$の近傍でweightと呼ばれる整数の組$k_p=(k_{p,i})\in\mathbb{Z}^r$によって定まる一定の漸近挙動を満たすとき$Z$の各点を$(V,h,A,\Phi)$のDirac型特異点と呼ぶ. ここで$X$のあるスピン構造から誘導されるスピノル束$S_X$を固定した時, (V,h,A,Φ)の定めるDirac作用素を$\partial\!\!\!/^{\pm}_{A,\Phi} := \partial\!\!\!/_A \pm \Phi$と表す事とし, これを$L^2(X\setminus Z, V\otimes S_X)$の間の閉作用素として扱う. このとき以下の結果が成立する.

定理 1 ([1])**.** Dirac作用素$\partial\!\!\!/^{\pm}_{(A,\Phi)}$は互いにAdjointな閉Fredholm作用素であり, その指数は以下の式で与えられる:

$$\mathrm{Ind}(\partial\!\!\!/^{\pm}_{(A,\Phi)}) = \mp\sum_{p\in Z}\sum_{k_{p,i}>0} k_{p,i}.$$

本講演ではこの主結果の証明のアイデアや応用, また時間が許せばDirac型特異点付きモノポールと複素幾何との繋がりなどについて解説する.

参考文献

[1] Masaki Yoshino, "An L^2-index formula of monopoles with Dirac-type singularities", arXiv : 1808.06227

* yoshino@kurims.kyoto-u.ac.jp

連立系非線形Schrödinger方程式に関する
ランダム化終値問題

山本拓人 [*]　京都大学 数理解析研究所 博士後期課程１年

キーワード：非線形 Schrödinger 方程式，散乱理論

本研究は中西賢次氏 (数理解析研究所) との共同研究に基づく．連立系非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t \boldsymbol{u} + M\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \to \mathbb{C}^N \tag{NLS}$$

について，時間大域的な漸近挙動を考察する．ここで，(NLS) の典型的な例としては，以下の指数型 (P-NLS)，連立系 (S-NLS) が挙げられる．

$$i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^p u, \quad (N = 1) \tag{P-NLS}$$

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2m_1}\Delta u = \lambda \bar{u} v, \\ i\partial_t v + \frac{1}{2m_2}\Delta v = \mu u^2, \end{cases} \qquad (N = 2) \tag{S-NLS}$$

関数 $\boldsymbol{u}_+$ を与え，$t \to \infty$ で $\boldsymbol{u}_+$ の自由解 ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = 0$ の解) に漸近する (NLS) の解 $\boldsymbol{u}$($\boldsymbol{u}_+$ への散乱解という) の存在，一意性を考える．このように，終値 $\boldsymbol{u}_+$ を与え，$\boldsymbol{u}_+$ への漸近を考える問題を終値問題という．大雑把には，初期値問題では有限時間内での初期値を与えるが，終値問題で初期時間を $t = \infty$ としたものと思える．

(P-NLS) について，中西賢次氏は $d \geq 3$, $\frac{2}{d} < p < \frac{4}{d}$ の場合には，任意の $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d)$ で u_+ への散乱解 u が存在することを示した [2]．しかし，この結果では散乱解の一意性までは分かっていない．そこで，Jason Murphy 氏は，終値 u_+ を “ランダム化” することによって，$p_0(d) < p < \frac{4}{d}$ でほとんど確実に散乱解が一意的に存在することを示した [1]．ただし，$p_0(d)$ は Strauss 指数といい，$p_0(d) > \frac{2}{d}$ である．

本講演では，この Strauss 指数 $p_0(d)$ より小さい $p_1(d) > \frac{2}{d}$ が存在して，$p_1(d) < p < \frac{4}{d}$ における (P-NLS) に対して，任意の終値 $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^d)$ への散乱解 u がほとんど確実に一意的に存在することを説明する．同様に連立系 (S-NLS) の $d = 3$ の場合に結果を適用できることも説明する．

参考文献

[1] J. Murphy; Random data final-state problem for the mass-subcritical NLS in L^2; Preprint arXiv:1703.09849v2.

[2] K. Nakanishi; Asymptotically-free solutions for the short-range nonlinear Schrödinger equations; SIAM J. MATH. Anal. **32** no. 6 (2001), 1265-1271.

[3] K. Nakanishi and T. Yamamoto; Randomized Final-Data Problem for Systems of Nonlinear Schrödinger Equations and the Gross-Pitaevskii Equation; Preprint arXiv:1805.05589.

[*] takutoya@kurims.kyoto-u.ac.jp

精度保証付き数値計算による電子のハミルトニアンの固有値の正確な下界評価

蘆田　聡平 * 京都大学　数理解析研究所

キーワード：ュレーディンガー方程式, 多体問題

本講演では、分子の構造と運動を研究するために重要な、電子のハミルトニアンの固有値の精密な下界評価を得るための研究計画を説明する。

分子の構造と運動は、電子と原子核の質量比が非常に小さい事に基づいた、ボルン・オッペンハイマー近似により、原子核の配置に関する微分作用素の研究に帰着される事が、数学的に厳密に証明されている (Klein-Martinez-Seiler-Wang '92, Martinez-Sordoni '09)。

ボルン・オッペンハイマー近似では、まず第一に電子のハミルトニアンと呼ばれる微分作用素の固有値を計算する必要がある。n 個の原子核の配置と、原子番号がそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ と $Z_1, \ldots, Z_n$ のとき、N 個の電子のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H(x_1, \ldots, x_n) := -\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_{y_j} - e^2 \sum_{\substack{1\le j\le N\\ 1\le k\le n}} Z_k \frac{1}{|y_j - x_k|} + e^2 \sum_{\substack{1\le j\le N\\ 1\le k\le N}} \frac{1}{|y_j - y_k|}.$$

ここで、e は電子の電荷、m は電子の質量、y_j は j 番目の電子の座標、Δ_{y_j} は j 番目の電子の座標に関するラプラシアンである。

$H(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ に依存しているので、$H(x_1, \ldots, x_n)$ の q 番目の固有値 $E_q(x_1, \ldots, x_n)$ も $(x_1, \ldots, x_n)$ に依存している。ボルン・オッペンハイマー近似では、大雑把に言って、原子核の配置や運動を決定するシュレーディンガー方程式が以下のように書ける。

$$i\frac{d}{dt}\psi_q = P_q\psi_q.$$

ここで、ψ_q は L^2 関数、P_q は原子核の運動に関するハミルトニアンと呼ばれる微分作用素で、以下のように書かれる。

$$P_q := -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2M_k}\Delta_{x_k} + E_q(x_1, \ldots, x_n) + e^2 \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le n}} \frac{1}{|x_k - x_l|}.$$

ここで、M_k は k 番目の原子核の質量である。

固有値 $E_q(x_1, \ldots, x_n)$ ごとにハミルトニアン P_q が存在する。実際には $\psi_q,\ \psi_r,\ q \neq r$ 間に相互作用が存在する。

固有値 $E_q(x_1, \ldots, x_n)$ の上界評価には、min-max 原理と呼ばれる方法があるが、下界評価には、高い精度の評価法が知られていない。本講演では、Grosse-Hertel-Thirring [1] の方法を用いて、数値計算により、$E_q(x_1, \ldots, x_n)$ を精度保証付きで計算する計画を説明する。

参考文献

[1] H. Grosse, P. Hertel and W. Thirring, *Acta Physica Austriaca*, **49** (1978), 89-112.

*ashida@kurims.kyoto-u.ac.jp

半線形波動方程式系に対するAgemi型の構造条件について

西井 良徳 * 大阪大学 理学研究科

キーワード：波動方程式

本講演は大阪大学の片山聡一郎氏と砂川秀明氏との共同研究に基づく. 次の半線形波動方程式系に対する初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \Box u_j = F_j(\partial u), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u_j(0,x) = \varepsilon f_j(x),\ \partial_t u_j(0,x) = \varepsilon g_j(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{1}$$

ここで $j = 1, 2, \cdots, N$ に対し $u_j = u_j(t,x)$ は実数値未知関数, $\Box = \partial_t^2 - \Delta$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial u = (\partial_a u_k)_{a=0,1,2;k=1,\cdots,N}$, $\partial_0 = \partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_1 = \partial/\partial x_1$, $\partial_2 = \partial/\partial x_2$ であり, $\varepsilon > 0$ は初期値の大きさを表す十分小さいパラメーター, f_j, g_j は有界な台を持つ $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数であるとする. 非線形項 F_j は ∂u に関する 3 次斉次多項式とする.

空間 2 次元における 3 次の非線形項は, 解の長時間挙動について臨界的な状況を与えることが知られている. つまり (1) は, ε がどんなに小さくても時間大域解が存在するとは限らない. 時間大域解が存在するための非線形項の条件の 1 つとして [1] で, $N \times N$ 行列に値をとる $\mathbb{S}^1$ 上の連続関数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\omega)$ で, 各 $\omega \in \mathbb{S}^1$ に対し $\mathcal{A}(\omega)$ は正定値実対称行列であるものが存在し,

$$Y \cdot \mathcal{A}(\omega) F^{red}(\omega, Y) \geq 0, \qquad (\omega, Y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

が成り立つならば, 十分小さい ε に対して (1) に時間大域解が存在することが示された. ここで $F^{red}(\omega, Y) = \left(F_j^{red}(\omega, Y)\right)_{j=1,2,\cdots,N}$, $F_j^{red}(\omega, Y) = F_j(\omega Y)$, $\omega Y = (\omega_a Y_k)_{a=0,1,2;k=1,\cdots,N}$, $\omega_0 = -1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{S}^1$, $Y \in \mathbb{R}^N$ である. さらに (2) に加えて

$$Y \cdot \mathcal{A}(\omega) F^{red}(\omega, Y) \neq 0, \qquad (\omega, Y) \in \mathbb{S}^1 \times \left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right), \tag{3}$$

が成り立つならば, 解のエネルギーが減衰することも示されている.

本講演では $N = 2$ の場合について考え, 今まで様子が知られていなかった (2) を満たすが (3) を満たさない非線形項 $F_1(\partial u) = -(\partial_t u_1)(\partial_t u_2)^2$, $F_2(\partial u) = -(\partial_t u_1)^2(\partial_t u_2)$ に対する (1) の解の漸近挙動について得られた結果を紹介する.

参考文献

[1] S. Katayama, A. Matsumura and H. Sunagawa, *Energy decay for systems of semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **22** (2015), 601–628.

*y-nishii@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Local well-posedness of the third order Benjamin-Ono equation on the torus

田中智之 * 名古屋大学大学院多元数理科学研究科/中央大学理工学部

キーワード：非線形分散型方程式, 時間局所適切性, Benjamin-Ono 階層, エネルギー法

1 次元トーラス上の 3 次 Benjamin-Ono 型方程式の初期値問題

$$\text{(3rdBO)}\begin{cases}\partial_t u - \partial_x^3 u + u^2\partial_x u + c_1\mathcal{H}\partial_x(u\partial_x u) + c_2\partial_x(u\mathcal{H}\partial_x u) = 0, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T},\\ u(0,x)=\varphi(x)\in H^s(\mathbb{T}) \end{cases}$$

について考える．ここで未知関数 u は実数値関数であり, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}$ はヒルベルト変換, $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 初期値 φ が属する空間 $H^s(\mathbb{T})$ はソボレフ空間である．通常の Benjamin-Ono 方程式は, 深い成層流体中の弱非線形の伝播を記述し, Benjamin-Ono 階層における最も基本的な方程式である．$c_1=c_2=\pm\sqrt{3}/2$ のとき (3rdBO) は可積分系の方程式であり, 通常の Benjamin-Ono 方程式の 1 階上の方程式である．

KdV 方程式系や BO 方程式系などは, 方程式が持つ対称性を利用することで可微分性の損失（の一部）を回復することが可能である．一方で, 連続依存性などを示す際に行う解の差の評価では, そのような対称性が崩れる．このため, H^s で差の評価を行う場合, 非線形項に微分が含まれる方程式では評価を H^s ノルムで閉じることは困難である．実軸上の $c_1=c_2=\pm\sqrt{3}/2$ のときの (3rdBO) については, Feng ら ([1, 2]) が $s\geq 4$ における解の一意存在を示した．差の評価については上記の理由と非線形項に 2 階の微分が含まれることから, H^s のアプリオリ評価を用いて H^{s-2} 上で差の評価を行ったため, 連続依存性の位相が H^{s-2} でしか得られていない．Feng らの手法は周期境界条件においても適用可能である．従って, 本講演の目的は, 可積分系でない場合も含む (3rdBO) において, 4 よりも小さな s に対して周期境界条件の元で (3rdBO) の適切性を得ること, 特に H^s の位相での連続依存性を得ることである．(3rdBO) のスケール臨界指数は $s=-1/2$ である．

定理 1. (3rdBO) は $s>5/2$ に対して時間局所適切である．

証明は, エネルギー法に基づく．特に, 非線形項に 2 階の微分が含まれることにより生じる可微分性の損失を, エネルギーに修正項を加えた手法 ([3]) を用いることで回復する．

参考文献

[1] X. Feng and X. Han, On the Cauchy problem for the third order Benjamin-Ono equation, J. London Math. Soc. (2) 53 (1996), 512–528.

[2] X. Feng, Well-posed solutions of the third order Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 4 (1997), 525–537.

[3] S. Kwon, On the fifth-order KdV equation: local well-posedness and lack of uniform continuity of the solution map, J. Differential Equations 245 (2008), 2627–2659.

* d18003s@math.nagoya-u.ac.jp/tanaka@gug.math.chuo-u.ac.jp

多重並列ミニマル平面 Couette 乱流に対する Lyapunov 解析

石川 寿雄* 京都大学 理学研究科

キーワード：応用数理, 流体力学, 乱流遷移, 安定性, Lyapunov 解析

背景・動機・結果

平面 Couette 流の乱流遷移過程では, 乱流領域が流れ方向に対して角度を持ったストライプパターンを成すことが実験的 [1] ・数値的 [2] に知られている. 本研究では Lyapunov 解析を用いてストライプパターンの形成メカニズムの解明を試みる.

一方, 乱流が維持される最小の領域サイズである最小流れ単位 (Minimal Flow Unit, 以下 MFU) [3], [4] における平面 Couette 乱流は Lyapunov 解析 [5] を含む様々な力学系の手法によって性質が明らかにされてきた. しかし, ストライプパターンの空間スケールは MFU より非常に大きいため, ストライプパターンが形成される領域サイズに対して Lyapunov 解析を適用することは膨大な計算資源を必要とし, 事実上不可能である.

そこで本研究では, 大きな領域における乱流の代わりに, MFU を水平方向に多数並べた多重並列領域における乱流を対象に Lyapunov 解析を行った. この設定の下では, Bloch の定理を適用することで, Lyapunov 解析が MFU 領域上の計算で実行可能となる.

計算の結果, 最も大きな Lyapunov 指数を持つモードは流れ方向に対して平行な Bloch 波数を持っており, ストライプパターンのような斜め方向とは異なることが分かった. 斜め方向のパターンを示すためには, MFU より広い領域でのダイナミクスや, Lyapunov 解析の範疇ではないモード間の非線形相互作用が重要であることが示唆される. 本講演ではさらに, 不安定モードが最も不安定となるメカニズムについても議論する予定である.

参考文献

[1] A. Prigent, G. Grégoire, H. Chaté & O. Dauchot. Long-wavelength modulation of turbulent shear flows, Physica D 174 (2003) 100-113.

[2] Y. Duguet, P. Schlatter & D. S. Henningson. Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow, J. Fluid Mech. (2010), vol. 650, pp. 119-129.

[3] J. Jiménez & P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence, J. Fluid Mech. (1991), vol. 225, pp. 213-240.

[4] J. M. Hamilton, J. Kim & F. Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structure, J. Fluid Mech. (1995), vol. 287, pp. 317-348.

[5] M. Inubushi, S. Takehiro & M. Yamada. Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence, Phys. Rev. E., 92, 023022 (2015).

*toshio@kurims.kyoto-u.ac.jp

摂動系における周期軌道，第一積分および可換なベクトル場の非保存

本永 翔也* 京都大学 情報学研究科

キーワード：常微分方程式，可積分判定，摂動系

概要

一般に解析的に解くことが不可能で，カオスのような複雑な挙動を示す可能性のある力学系に対して，周期軌道やホモクリニック軌道，第一積分や可換なベクトル場を求める，あるいはそれらの存在（または非存在）を示すことは基本的かつ重要な問題である．例えばPoincaré は制限三体問題に関する研究 [1] において，Liouville 可積分な 2 自由度ハミルトン系が摂動を受ける場合に対して，ある意味での非可積分性を示している．この結果は非摂動系における第一積分や可換なベクトル場が摂動によって失われていることを意味しており，常微分方程式の複雑さを認識するきっかけとなった．

こうした事実に加えて，Liouville 可積分性を一般の自律的力学系に拡張した，系の第一積分と可換なベクトル場が十分な数存在するという概念である Bogoyavlenskij 可積分性 [2] や，1 自由度ハミルトン系が周期的摂動を受ける場合において周期軌道およびホモクリニック軌道が存在するための十分条件を与える標準的なメルニコフの方法 [3] を背景に，摂動系の周期軌道と第一積分，可換なベクトル場について考える．

本発表では，滑らかな多様体上のベクトル場が第一積分と周期軌道を持つとして，この系が摂動を受けるような場合において，非摂動系の第一積分や周期軌道が微小変化を許して保存しているための必要条件を紹介する．この結果を用いると，系を余接束上に持ち上げることで，可換なベクトル場が保存するための必要条件も得ることができる．また，得られた結果とメルニコフの方法との関係についても触れる．本研究は矢ケ崎一幸教授との共同研究である．

参考文献

[1] H. Poincaré, New Methods of Celestial Mechanics, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).

[2] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, Comm. Math. Phys., 196 (1998), 19–51.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983.

*mnaga@amp.i.kyoto-u.ac.jp

Local well-posedness for the Cauchy problem of the Zakharov type system

加藤 勲 * 京都大学大学院 理学研究科

キーワード：非線型分散型方程式，低い滑らかさを持つ初期値に対する適切性問題，
Fourier 制限ノルム法

本講演では Zakharov 型方程式，すなわち Zakharov 方程式においてある方向の分散性が退化した方程式 (Z) の初期値問題の適切性について考察する．

$$(Z)\ \begin{cases} i(\partial_t E + \partial_{x_d} E) + \Delta_\perp E = nE, & (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^d, \\ \partial_t^2 n - \Delta_\perp n = \Delta_\perp |E|^2, & (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^d, \\ (E, n, \partial_t n)|_{t=0} = (E_0, n_0, n_1) \end{cases}$$

ただし，$d \geq 2, \Delta_\perp = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{x_i}^2, E$ は複素数値関数，n は実数値関数である．$d = 3$ のとき (Z) はレーザー光の伝播を記述する方程式である．

(Z) の線型部は Zakharov 方程式のそれよりも複雑であるため，Ginibre-Tsutsumi-Velo([1]) による Zakharov 方程式の初期値問題の適切性結果を直接適用することは困難である．$d = 3$ の場合の適切性に関する既知の結果として Barros-Linares([2]) があるが，極大関数評価などの線型評価式を用いているため初期値にある程度の滑らかさを課している．すなわち，

$$\tilde{H}^2(\mathbb{R}^3) = \{f \in H^2(\mathbb{R}^3) \mid D_{x_1}^{1/2} \partial^\alpha f, D_{x_2}^{1/2} \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^3), |\alpha| = 2\},$$

$D_{x_i}^{1/2} f = \mathcal{F}_{\xi_i}^{-1}[|\xi_i|^{1/2} \mathcal{F}_{x_i}[f]]\ (i = 1, 2), \alpha \in (\mathbb{Z}_+)^3$ を多重指数としたとき，$(E_0, n_0, n_1) \in \tilde{H}^2(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ かつ $\partial_{x_3} n_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ に対して，(Z) は適当な関数空間において時間局所適切である．

本講演では Fourier 制限ノルム法と呼ばれる低い滑らかさを持つ初期値に対する適切性問題に有効な手法を適用し，[2] より低い滑らかさで時間局所適切性が得られることを述べる．

参考文献

[1] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. **151** (1997), 384–436.

[2] V. Barros, and F. Linares, *A Remark on the well-posedness of the degenerated Zakharov system*, Comm. Pure. Appl. Anal. **14** (2015), 1259–1274.

*isao.kato@math.kyoto-u.ac.jp