THÉORIE DES NOMBRES / NUMBER THEORY

UN ANNEAU DE DÉFORMATION UNIVERSEL EN CONDUCTEUR SUPÉRIEUR

JAKUB BYSZEWSKI, GUNTHER CORNELISSEN ET FUMIHARU KATO

RÉSUMÉ. Soit k un corps parfait de caractéristique 5. Nous démontrons que l'anneau versel de l'action d'un élément d'ordre 5 et de conducteur de Hasse 2 comme automorphisme d'un anneau de séries formelles $k[\![t]\!]$ calculé par Bertin et Mézard, est en fait *uni*versel. C'est le premier exemple d'anneau non-trivial de déformation universel en conducteur supérieur.

A universal deformation ring in higher conductor

ABSTRACT. Let k denote a perfect field of characteristic 5. We show that the versal deformation ring of an element of order 5 and Hasse conductor 2 as automorphism of a ring of formal power series $k[\![t]\!]$, computed by Bertin and Mézard, is in fact *uni*versal. This provides the first example of a non trivial universal deformation ring in higher conductor.

1. INTRODUCTION

On ne connait que quelques anneaux de déformation formelle pour les actions de groupes finis par automorphismes (continus) d'un anneau de séries formelles en caractéristique positive : pour les actions de conducteur de Hasse 1 (dites ≪ faiblement ramifiées ≫, [1], [5], [6], [4]), et pour l'action d'un élement d'ordre 5 et conducteur 2 en caractéristique 5 ([1]). Néanmoins, ces actions sont interessantes ; par exemple, le principe ≪ local-global ≫ de Henrio, Green-Matignon et Bertin-Mézard ([8], [7], [1]) implique que les questions de déformations et de relèvements des actions de groupes sur les courbes algébriques se réduisent à des questions similaires pour les actions par automorphismes de $k[\![t]\!]$. Dans cette note, nous démontrons que l'anneau versel de déformation d'une action d'ordre 5 et conducteur 2 en caractéristique 5 est universel. Ceci donne un premier exemple non trivial d'un anneau universel pour une action non faiblement ramifiée. Les foncteurs de déformations locales admettant une infinitude d'automorphismes infinitésimales, ce résultat peut être une surprise. La démonstration d'universalité pour les actions faiblement ramifiées dans [4] utilise des méthodes qui ne se généralisent pas aux cas de conducteur supérieur et donc ne donne pas de raisons évidentes pour établir l'universalité dans une situation plus générale. Pour ces raisons, nous espérons que notre résultat, qui n'est au fond qu'un calcul, serve à illuminer la question de l'universalité en conducteur supérieur.

Pourquoi s'interesser à l'universalité ? Remarquons que, pour les questions géométriques, la versalité des anneaux de déformation suffit souvent pour obtenir les résultats désirés. Par contre, en théorie des nombres, on a besoin d'établir l'universalité. Si les déformations de représentations linéaires d'un groupe sont comprises (≪ Lemme de Schur ≫, cf. [9]), les représentations par automorphismes des séries formelles restent souvent plus mystérieuses. Pourtant

Date: 14 octobre 2009 (version 1.0).

l'universalité est parfois essentielle. Par exemple, dans [4, Remark 3.3]) pour calculer l'anneau *versel* de la déformation d'une action faiblement ramifiée de $\mathbf{Z}/p \oplus \mathbf{Z}/p$, on utilise l'*universalité* de l'action de $\mathbf{Z}/p$. Un autre exemple : pour établir des résultats de ≪ dévissage ≫ pour les foncteurs de déformations locales il est parfois nécessaire de supposer que les anneaux de déformations sont universels [3, Theorem 6.4.7], [2].

2. UNIVERSALITÉ

Soit k un corps parfait de caractéristique 5 et soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k. Tout automorphisme de l'anneau de séries formelles $k[\![t]\!]$ d'ordre 5 et de conducteur (de Hasse) $\mathrm{ord}_t(\frac{\sigma(t)}{t} - 1)$ égal à 2 est conjugé à :

$$\sigma \,:\, t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}. \tag{1}$$

(Voir [1, 4.2.1]).) Bertin et Mézard ([1]) ont étudié le foncteur de déformations formelles infinitésimales de σ. Soit Art_k la catégorie des $W(k)$-algèbres locales artiniens de corps résiduel k. Pour un anneau A de Art_k, on appelle *relèvement* de σ à A une série formelle $\widetilde{\sigma}(t) \in \mathrm{Aut}_A A[\![t]\!]$ d'ordre 5 (pour la composition) et telle que $\widetilde{\sigma}(t) \equiv \sigma(t) \bmod \mathfrak{m}_A$. On dit que deux relèvements $\widetilde{\sigma}_1$ et $\widetilde{\sigma}_2$ de σ à A sont équivalents s'ils sont conjugués par un élément ξ de $\mathrm{Aut}_A A[\![t]\!]$ tel que $\xi(t) \equiv t \bmod \mathfrak{m}_A$. On définit le foncteur de déformations formelles infinitésimales de σ

$$D_\sigma : \mathsf{Art}_k \to \mathsf{Ens},$$

qui associe à un anneau A de Art_k l'ensemble des classes d'équivalence de relèvements de σ à A.

Rappelons quelques notions de théorie infinitésimale des foncteurs (voir aussi [10]). On dit qu'un foncteur $D\colon \mathsf{Art}_k \to \mathsf{Ens}$ est *pro-représentable*, s'il existe un anneau local noetherien complet R de corps residuel k tel que D est isomorphe à un foncteur $\mathrm{Hom}(R, \cdot)$, qui associe à un anneau A de Art_k l'ensemble des homomorphismes locaux de $W(k)$-algèbres de R dans A. Si un tel anneau existe, on appelle R l'*anneau universel* de σ. Parfois, il n'est facile que d'établir un condition plus faible : on dit qu'un foncteur $D\colon \mathsf{Art}_k \to \mathsf{Ens}$ admet un *anneau versel* R, si $D(k)$ est réduit à un seul élément et s'il existe un foncteur pro-représentable $F = \mathrm{Hom}(R, \cdot)$ et un morphisme lisse $\varphi\colon F \to D$, c.-à-d., tel que pour tout morphisme surjectif $A' \to A$ dans Art_k, l'application induite

$$F(A') \to D(A') \times_{D(A)} F(A)$$

est surjective ; de plus, on demande que l'application $F(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \to D(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ soit bijective. Lorsqu'il en est ainsi, on appelle φ un *morphisme versel*. L'anneau R et le morphisme φ sont alors unique (à un isomorphisme non-unique près), et le foncteur D est pro-représentable si et seulement si le morphisme versel est un isomorphisme. On appelle l'*action verselle* une classe de conjugaison d'une série formelle $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}_R R[\![t]\!]$ telle que l'image de $\widetilde{\sigma}$ dans $D(R/\mathfrak{m}_R^n)$ est égale à l'image par le morphisme versel de projection canonique $R \to R/\mathfrak{m}^n$.

Bertin et Mézard ont démontré ([1, Théorème 4.2.8]) que D_σ admet un anneau versel

$$R_\sigma = W(k)[y]/\langle 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 \rangle$$

avec l'action verselle

$$\sigma_y \,:\, t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+y}}.$$

Le cas de caractéristique 5 et conducteur 2 est le seul cas du conducteur > 1 dans lequel l'anneau versel d'une action d'un groupe cyclique a été complètement déterminé.

Théorème. *L'anneau R_σ est* uni*versel.*

Démonstration. Soit A un anneau de la catégorie Art_k, $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal. Nous prouvons que le morphisme versel est un isomorphisme. Supposons que $y_1, y_2 \in A$ satisfont $y_1^4 + y_1^3 + y_1^2 + y_1 + 1 = y_2^4 + y_2^3 + y_2^2 + y_2 + 1 = 0$, $y_1 \equiv y_2 \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_A$ et qu'il existe une série formelle $g(t) \in A[\![t]\!]$ inversible (pour la composition) tel que $g(t) \equiv t \mod \mathfrak{m}_A$ et

$$\sigma_{y_2} \circ g = g \circ \sigma_{y_1}.$$

Pour démontrer l'universalité, il suffit de montrer que $y_1 = y_2$ — la seule complication étant que l'on considère un anneau $A \in \mathsf{Art}_k$ arbitraire (le résultat est trivial sur un corps). Si l'on pose $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + O(t^3)$, on observe que $a_0 \in \mathfrak{m}_A$ et $a_1 \in A^*$. Les termes d'ordre 0 et 1 du développement en t de l'égalité

$$\frac{g(t)}{\sqrt{g(t)^2 + y_1}} = g\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + y_2}}\right). \tag{2}$$

donnent les formules :

$$a_0 = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + y_1}} \tag{3}$$

et

$$a_1 \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + y_1}} - \frac{a_0}{(a_0^2 + y_1)^{3/2}} a_0 a_1 = a_1 \frac{1}{\sqrt{y_2}}. \tag{4}$$

Dans (4), on a a_1 inversible et on peut utiliser (3) pour simplifier (4), ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{a_0^2 + y_1}} - \frac{1}{\sqrt{y_2}} = a_0^2. \tag{5}$$

Les termes d'ordre trois dans (2) donnent

$$\frac{a_0 {a_1}^2}{({a_0}^2 + y_1)^{3/2}} - \frac{a_0}{\sqrt{{a_0}^2 + y_1}} \left(\frac{{a_0}^2 {a_1}^2}{({a_0}^2 + y_1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{{a_0}^2 {a_1}^2}{({a_0}^2 + y_1)^2} - \frac{{a_1}^2 + 2a_0 a_2}{{a_0}^2 + y_1} \right) \right)$$
$$= \frac{a_2}{\sqrt{{a_0}^2 + y_1}} - \frac{a_2}{y_2}.$$

En utilisant (3) et (5),

$$a_2 \frac{1}{\sqrt{y_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{y_2}} - 1 \right) = \frac{3}{2}(a_0^2 - 1) a_0 a_1^2. \tag{6}$$

Comme $\frac{3}{2}(a_0^2 - 1)a_1^2$ est inversible, on a

$$a_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{y_2}} - 1 \right) A.$$

Multipliant (5) par a_0 et utilisant (3), on obtient

$$a_0 \left(\frac{1}{\sqrt{y_2}} - 1 \right) = a_0^3,$$

et par suite $a_0^2 \in a_0^3 A$. Comme l'anneau A est local, cela entraîne $a_0^2 = 0$; la conclusion résulte de (5). □

RÉFÉRENCES

1. J. Bertin and A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. **141** (2000), no. 1, 195–238. MR MR1767273 (2001f :14023)
2. J. Byszewski, *Dévissage for local deformation functors*, Preprint 2009.
3. ______, *Cohomological aspects of equivariant deformation theory*, Ph.D. thesis, University of Utrecht, 2009, `igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2009-0520-200657/UUindex.html`.
4. J. Byszewski and G. Cornelissen, *Which weakly ramified group actions admit a universal formal deformation ?*, Ann. Inst. Fourier **59** (2009), no. 3, 877–902.
5. G. Cornelissen and F. Kato, *Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic*, Duke Math. J. **116** (2003), no. 3, 431–470. MR MR1958094 (2004c :14044)
6. G. Cornelissen and A. Mézard, *Relèvements des revêtements de courbes faiblement ramifiés*, Math. Z. **254** (2006), no. 2, 239–255. MR MR2262702 (2007k :14040)
7. B. Green and M. Matignon, *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Compositio Math. **113** (1998), no. 3, 237–272. MR MR1645000 (99k :14045a)
8. Y. Henrio, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels*, Thèse Université Bordeaux 1, télécharge : http ://www.math.u-bordeaux.fr/˜matignon/preprints.html, 1999.
9. B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over **Q** (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, pp. 385–437. MR MR1012172 (90k :11057)
10. M. Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222. MR MR0217093 (36 #184)

MATHEMATISCH INSTITUUT, UNIVERSITEIT UTRECHT, POSTBUS 80.010, 3508 TA UTRECHT, NEDERLAND
E-mail address: `j.j.byszewski@uu.nl`

MATHEMATISCH INSTITUUT, UNIVERSITEIT UTRECHT, POSTBUS 80.010, 3508 TA UTRECHT, NEDERLAND
E-mail address: `g.cornelissen@uu.nl`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES, UNIVERSITY OF KYOTO, KYOTO 606-8502, JAPAN
E-mail address: `kato@math.kyoto-u.ac.jp`

AUTEUR CORRESPONANT : G. CORNELISSEN, TÉL. +31 30 253 1476, FAX +31 30 251 8394