

下記の問題から一題を選んで解き、5月23日(水)までに理学部3号館101数学事務室に提出してください。(氏名、学年、学籍番号を忘れずに記入してください。)
成績優秀者の発表と表彰式は懇親会中に行います。ささやかながら賞品も用意していますので、奮ってご参加ください。

ガロア祭・懸賞問題

問題1 A, B を2次の正方行列として、 A の B 乗 A^B をできるだけ多くの A, B について定義したいと思います。どう定義したらいいか、考えてください。あなたの定義では、

$$A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき、 A^B はどうなりますか。

問題2 フィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ は、不思議にいろいろな所に顔を出す数列で、

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されます。これを少し変えて、

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad b_{n+3} = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される数列を考えましょう。この数列はどのような性質を持っていますか。自由に考えてみてください。

問題3 実数 a ($0 \leq a \leq 4$) を固定する。多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を

$$f_1(x) = ax(1-x), \quad f_{n+1} = f_1(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $y = f_n(x)$ のグラフを描いた時に、増減が変わる回数を $\ell(n)$ とおく。 n を大きくしていった時に、 $\ell(n)$ はどのように変化するでしょうか。特別な a に対して調べるだけでも構いません。

問題4 k を整数とする。方程式

$$y^2 = x^3 + k$$

をみたす整数 x, y はどの位あるでしょうか。また、この方程式をみたす有理数 x, y はどの位あるでしょうか。 k を自由に選んで、調べてみてください。