2011年度ガロア祭懸賞問題

問題 1 オイラーは 1735 年頃に

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots \tag{1}$$

という有名な等式を示しました. これを使うと ($\frac{\pi^4}{90} = \frac{2}{5} \cdot (\frac{\pi^2}{6})^2$ より)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{5} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 \tag{2}$$

が成り立つはずです. これをオイラーの結果を経由せずに直接証明できるでしょうか? できれば色々一般化してみてください.

問題 2 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq 6$ を満たす整数の組 $(a_1, \ldots, a_6)$ を考えます.

(0) このような $(a_1, \ldots, a_6)$ は全部でいくつあるでしょうか?

(1) 整数 $k \geq 0$ に対して, $(a_1, \ldots, a_6)$ の k-シフト とは

> $(a_1 + k, a_2 + k, \ldots, a_6 + k)$ を計算し, 6 を超えた成分は 6 で割った余りで置き換え, さらに小さい順に並べなおしたもの

とします (例えば $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$ の 4-シフトは $(1, 5, 5, 5, 6, 6)$ です). k-シフトが元の列 $(a_1, \ldots, a_6)$ に一致するようなものを k-シフト不変であるといいます (例えば $(1, 1, 3, 4, 4, 6)$ は 3-シフト不変です). $k = 0, 1, 2, 3$ に対して, k-シフト不変な列の個数を求めてください.

(2) 正の整数 n に対して, $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + q + 1$ と置きます.

$$f(q) = \frac{[11]_q[10]_q[9]_q[8]_q[7]_q[6]_q[5]_q[4]_q[3]_q[2]_q[1]_q}{[6]_q[5]_q[4]_q[3]_q[2]_q[1]_q \cdot [5]_q[4]_q[3]_q[2]_q[1]_q}$$

が q に関する整数係数多項式となることを示してください.

(3) $f(1), f(-1), f(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}), f(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})$ を計算してください.

(4) 以上の話から観察される現象を調べてください. (証明ができなくても, 実験や予想を自由に考えてください.)

問題 3　(1) $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の周期 2π の複素数値 C^∞ 級関数とする．任意の整数 n に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx = 0$$

が成り立つならば, $f(x) = 0$ であることを示せ.

(2) $\tau \in \mathbf{C}$ を $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を充たす複素数とし, $1, \tau \in \mathbf{C}$ が生成する複素平面上の平行四辺形を P_τ とする．1 と τ を周期として持つ $\mathbf{C}$ 上の複素数値二重周期関数全体の成す複素ベクトル空間を $\mathcal{H}_\tau$ で表す:

$$\mathcal{H}_\tau = \{f(z) \in C^\infty(\mathbf{C});\ f(z + m\tau + n) = f(z),\ \forall\, z \in \mathbf{C},\ \forall\, m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

以下, $\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}^2$ を $z = x + iy$ により同一視する．$\mathcal{H}_\tau$ 上の線形変換 $\square_\tau$ を以下の式で定義する:

$$\square_\tau = -\frac{(\mathrm{Im}\,\tau)^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

$\mathcal{H}_\tau$ の内積を

$$(f, g) = \int_{P_\tau} f(z)\overline{g(z)}\, \frac{dxdy}{\mathrm{Im}\,\tau}$$

で定めれば, $\square_\tau$ は $\mathcal{H}_\tau$ 上の Hermite 変換である事を示せ.

(3) $\square_\tau$ の固有値と固有関数の組をできるだけ多く（可能ならば全て）求めよ.

問題 4 変数 x の**形式的冪級数**とは次の形の形式的無限和のことである．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \quad a_i \in \mathbf{C}$$

形式的冪級数の和，スカラー倍，積は自然に定義される．変数 x の**収束冪級数**とは上の形の無限和であって，ある正の数 $\epsilon > 0$ が存在して $|x| < \epsilon$ のときに和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するもののことである．いま形式的冪級数 $f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$g_0(x) f(x)^n + g_1(x) f(x)^{n-1} + \cdots + g_n(x) = 0$$

ここで $g_0(x), \ldots, g_n(x)$ は全てはゼロでない収束冪級数とする．このとき $f(x)$ は収束冪級数となるか．

問題 5 Aを実数の集合$\mathbf{R}$の中の高々可算な閉集合とする．Aの点aがAの**集積点**であるとは，任意の正の数$\epsilon > 0$に対してaのϵ近傍とAの交わり$\{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \epsilon\} \cap A$に$a$以外の点が含まれることである．高々可算な閉集合$A$に対して集合$F(A)$を次で定義する．

$$F(A) = \{a \in A \mid a \text{ は } A \text{ の集積点}\}.$$

$F(A)$も高々可算な閉集合であることは容易にわかる．高々可算な閉集合Aであって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(A) \neq \emptyset, \quad F^n(A) = \overbrace{F(F(\cdots F}^{n \text{ 回合成}}(A)\cdots))$$

を満たすものは存在するか．

問題 6 nを2以上の整数とする．全単射$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$が任意の$\mathbf{R}^n$の直線を$\mathbf{R}^n$の直線に移すとする．このとき$f$はアファイン変換であるか．ただし$f$の連続性は仮定しない．

問題 7 $\mathbf{R}^n$のベクトルを次の形の$(2,k)$行列に並べたもの

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix}, \quad v_i, w_i \in \mathbf{R}^n$$

を考える．Mを上のような形の$(2,k)$行列全体の集合とする．ただしkは任意の自然数を動く．Mに次の関係$\sim$で生成される同値関係を入れる．

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} & v_{\sigma(2)} & \cdots & v_{\sigma(k)} \\ w_{\sigma(1)} & w_{\sigma(2)} & \cdots & w_{\sigma(k)} \end{pmatrix}, \quad \forall \sigma \in S_k$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k & v_{k+1} \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall v_{k+1} \in \mathbf{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{k-1} & v_k & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_{k-1} & w_k & w_{k+1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{k-1} & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_{k-1} & w_k + w_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k + cw_k \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_k \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

Mをこの同値関係で割った商集合$M/\sim$を記述せよ．

(問題作成：**1, 2**（吉永），**3**（吉川），**4–7**（入谷))