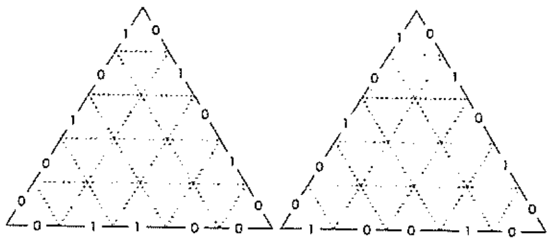
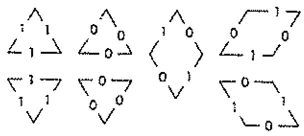
2010 年度ガロア祭問題 (加藤作成)

問題

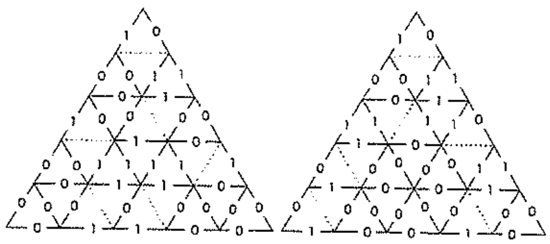
n 個の 0 と 1 から成る数列であって 1 の個数が k 個であるもの全体の集合を $\mathcal{P}_{n,k}$ と置きます。例えば $\mathcal{P}_{3,2}$ は $\{110\}, \{011\}, \{101\}$ の 3 つの数列からなる集合です。この時、3 つの辺の長さがともに n である正三角形の 3 つの辺に $\mathcal{P}_{n,k}$ の 3 つの元 $a_\bullet = \{a_i\}_{i=1}^n, b_\bullet = \{b_i\}_{i=1}^n, c_\bullet = \{c_i\}_{i=1}^n$ を底辺以外の 2 つの辺には $a_1, a_2, \ldots, b_n$ と底辺の左端から右上へ、頂点を経て底辺の右端へと、底辺には $c_1, \ldots, c_n$ と辺の長さ 1 単位分につき 1 つずつ並べます。ここで



は $n = 5$ の時に $a_\bullet = \{00101\}, b_\bullet = \{01010\}$ を固定して $c_\bullet = \{01100\}$ または $\{10010\}$ と置いたときの正三角形の状態です。この正三角形を辺上の数が全て互いに等しくなるように次の 7 種類のパズルピースを用いて敷き詰めることを考えます。(注意:回転を許せば異なるピースは 3 種類です。)



上の 2 つの例ではパズルピースによる敷き詰めは以下のようなものに限ります。



(1) $a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet \in \mathcal{P}_{n,k}$ に対してパズルピースによる敷き詰めが存在するとします。このとき $a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet$ に出現する 1 のみを 2 回繰り返して出来る $a_\bullet^2, b_\bullet^2, c_\bullet^2 \in \mathcal{P}_{n+k,2k}$ に対してもパズルピースによる敷き詰めが存在する事を示してください (実はこの逆も成立します)。ここで例えば

$$a_\bullet = \{00101\}, b_\bullet = \{01010\}, c_\bullet = \{01100\} \Rightarrow a_\bullet^2 = \{0011011\}, b_\bullet^2 = \{0110110\}, c_\bullet^2 = \{0111100\}$$

です。

(2) 今、$a_\bullet \in \mathcal{P}_{n,k}$ を

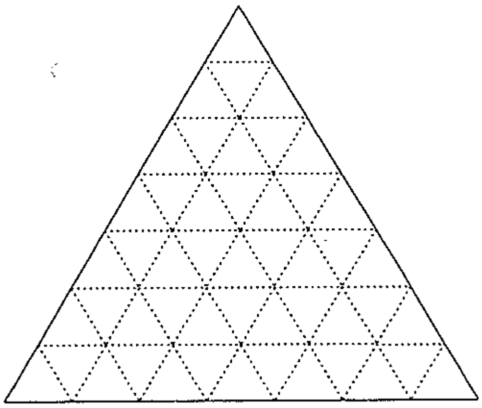
$$a_\bullet = \{\overbrace{0 \cdots\cdots\cdots 0}^{(n-k-1)\text{ 個}} 10 \overbrace{1 \cdots\cdots\cdots 1}^{(k-1)\text{ 個}}\}$$

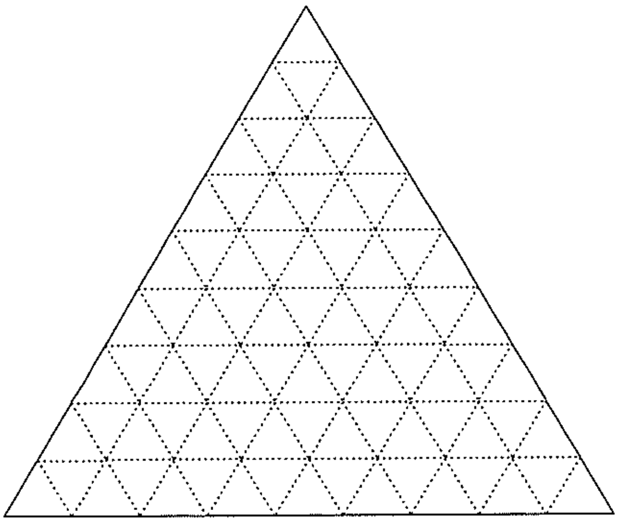
ととります。また、$b_\bullet \in \mathcal{P}_{n,k}$ の 1 の場所を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$(番目) と置いたとします。この時 $a_\bullet, b_\bullet, c_\bullet \in \mathcal{P}_{n,k}$ に対して $c_\bullet$ の 1 の場所を $\beta_1, \ldots, \beta_k$(番目) と置いた時に

$$\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \beta_k \leq \alpha_k \text{ かつ } \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) = 1$$

が成立するならばパズルピースによる敷き詰めが一意的に可能である事を示して下さい。

(3) パズルピースの敷き詰めが一意的にできる状況としては (2) のようなもの以外にどのようなものがあるのかを自由に考えてみてください。





実験用白パズル

ガロア祭問題（小西作成）

凸体の問題.　まずはじめに：$C \subset \mathbb{R}^2$ が次の条件を満たすとき凸集合であるという：「C の任意の異なる2点 u, v に対して u, v を結んでできる線分が C に含まれる」.

$P, Q \subset \mathbb{R}^2$ を空でない有界な凸集合とする．P の点と Q の点の和で表される点全体の集合を $P+Q$ とおき，P と Q の Minkowski 和という．すなわち，

$$P+Q := \{u+v \in \mathbb{R}^2 \mid u \in P,\ v \in Q\}\ .$$

P, Q の混合面積 $V(P,Q)$ を

$$V(P,Q) := \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{Vol}(P+Q) - \mathrm{Vol}(P) - \mathrm{Vol}(Q)\bigr)$$

で定義する．ただし $\mathrm{Vol}(P)$ は P の面積である．

(1-1) 正の実数 $r>0$ に対して $B(r)$ を原点を中心とした半径 r の円 (円の内部および円周を含む) とする．すなわち

$$B(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2\}\ .$$

$P = B(r_1), Q = B(r_2)$ のとき，$P+Q$ はどんな図形か？また混合面積 $V(P,Q)$ を求めよ.

(1-2) いろいろな P, Q に対して $P+Q$, $V(P,Q)$ を考えてみてください.

(1-3) $V(P,P) = \mathrm{Vol}(P)$ を示せ.

(2) Minkowski の不等式

$$V(P,Q)^2 \ge \mathrm{Vol}(P)\cdot\mathrm{Vol}(Q)$$

を示せ．一般の P, Q の場合が難しければ特殊な場合でもかまいません。

ガロア祭問題（伊藤作成）

問題.

(1) p を3以上の素数とし，$a = 2^{p-1}$ とおく．$a-1$ が p で割り切れることを示せ.

(2) また，$a^{p^n}-1 = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{p^n\text{個}}-1$ が p^{n+1} で割り切れることを示せ.

(3) 一般に p を素数，a を整数としたとき，$a^{p^n}-1$ は p で何回割り切れるでしょうか．様々な p, a について自由に考察してみてください.

ガロア祭問題（三輪）

[1] オリンピックのカーリングを見ながら考えたこと。２N＋１チームの総当たりのリーグ戦ですべてのチームがN勝N敗の結果になることがあるか？あるとすれば、本質的に違うなり方はどれだけあるか？

[2] 無限遠にある光源が単色のとき、単色の虹が見えるか？見えるとすれば、どのように見えるかを、数式を使って説明せよ。光源が有限の距離のとき虹の見え方はどのように変化するか？