ガロア祭　懸賞問題

次の５つの問題のうちから、一問あるいは二問を選んで、解答してください。すぐれた解答を、ガロア祭の最後に表彰し賞品を出します。

解答提出先：理学部３号館数学科事務室。５月２７日（水）しめきり。

問題１　直角三角形の３辺の長さを x, y, z (z は斜辺の長さ) とすると，ピタゴラスの定理より $x^2 + y^2 = z^2$ が成り立ちます．整数の三つ組 x, y, z で $x^2 + y^2 = z^2$ が成り立つものとしては，$3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$ などがあります．

(1) $x^2 + y^2 = z^2$ が成り立つ整数の三つ組 x, y, z はこれ以外にどのようなものがありますか？

(2) 他の方程式ではどうなりますか？$x^2 + 2y^2 = z^2$, あるいは $x^2 - 3y^2 = z^2$ ではどうでしょうか？整数の世界には，$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ のように，これ以外にもいろいろな関係式があります．自由に考えて，自分が面白いと思う関係式を見つけてください．

(3) $\alpha = a + bi$ (a, b は整数, $i^2 = -1$) という形の複素数を**ガウス整数**といいます．$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ をみたすガウス整数には，どのようなものがあるでしょうか？

問題２　$\frac{p}{q}$ (p, q は整数, $q \neq 0$) という形で書ける数を**有理数**といい，有理数でない実数を**無理数**といいます．$\sqrt{2}$ が無理数であることはよく知られています．

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数でしょうか？無理数でしょうか？

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ は有理数でしょうか？無理数でしょうか？

(3) それでは，一般に，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{k} \qquad (n \geqq 1,\ a_1, a_2, ..., a_n \text{は整数})$$

が有理数になるのはいつでしょうか？

問題３　座標平面上の点 (x, y) で，x, y が整数であるものを**格子点**といいます．原点 $O = (0, 0)$ を中心とした半径 r ($r > 0$) の円 C_r の内部（周囲も含む）に含まれる格子点の個数を S_r とおきます．

(1) S_2, S_3, S_5, S_{10} はいくつでしょうか？

(2) C_r の面積は πr^2 ($\pi = 3.1415\cdots$ は円周率) ですから,『S_r はだいたい πr^2 に等しい』と期待されるでしょう.『S_r はだいたい πr^2 に等しい』はどういうことか，数学的に定式化してください．そして，あなたの定式化に従って,『S_r はだいたい πr^2 に等しい』ことを証明してみてください．

(3) コンピュータが使える人は S_{100}, S_{1000}, S_{10000} などを計算してみて,『S_r はだいたい πr^2 に等しい』ことを確かめてみましょう.

(4) 格子点の代わりに，座標が $(x+\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ (x, y は整数) の点を考えたらどうなりますか？あるいは，円以外の図形ではどうなりますか？3 次元空間内の球ではどうでしょうか？自由に考えてみてください.

問題 4　私たちは、たて、横、高さのある、3 次元の世界に住んでいます。もし私たちが百万次元の世界に住む生き物だったとしたら、この 3 次元の世界とどんなに違うおもしろい体験をするでしょう。百万次元の立方体の対角線の長さは長いだろうか短いだろうか、その長さがどんな不便を生むだろうか。その世界では恋人と何個の目で見つめ合い何本の手を握り合うだろうか。などなど、数学的に考察してください。

問題 5　2^n-1 の形の素数（$2^2-1=3$, $2^3-1=7$, $2^5-1=31$ など）は無限にあるかどうか、今の所、わかっていません。「2^n-1 の形の素数は無限にある」あるいは「2^n-1 の形の素数は有限個しかない」のいずれかをその特別な場合として含むような、できるだけ一般的な、できるだけ立派な予想を、どうしてそう予想するかについての考察を付して、提起してください。