2012年度ガロア祭懸賞問題

問題 1 指数に有理数を含む次の形の冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\frac{n}{N}} \qquad N \in \mathbb{N}$$

を Puiseux（ピュイズー）級数と言います．次の 5 次方程式

$$(1+x)y^5 - x^2y^3 - xy^2 + 2x^2y - x^3 = 0$$

の解 y を x の Puiseux 級数として求める方法を与えてください．y の 5 次方程式なので答えは 5 つあると思われます．またその級数は収束するでしょうか．

問題 2 x, y, z, w がすべては 0 でない有理数なら，

$$x^2 - 2y^2 + 5(z^2 - 3w^2) \neq 0$$

であることを証明してください．

問題 3 平面 $\mathbb{R}^2$ は互いに交わることのない円の和集合とはならないことを証明してください．

問題 4 空間 $\mathbb{R}^3$ は互いに交わることのない円の和集合となることを証明してください．

問題 5 単位円 $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\}$ を正則行列 A で写した図形

$$A\mathbb{S}^1 = \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \right\}$$

は円または楕円になることを示してください．

問題 6 単位円に 3 点 a, b, c で接する三角形 $\triangle ABC$ を考え，原点を O として

$$|\triangle OAB|c + |\triangle OBC|a + |\triangle OCA|b$$

というベクトル v を考えます（図 1 参照）．ここで，$|\triangle OAB|$ は $\triangle OAB$ の面積を表します．任意の $\triangle ABC$ に対し，v は 0 であることを証明してください．

問題 7 実は，前問で述べた性質は，原点対称な閉曲線 γ でその囲む領域 D が凸なもの（$x, y \in D$ なら $(x+y)/2 \in D$）の中で，円及び楕円を特徴づけます．つまり，γ が円や楕円でなければ，それに接する三角形 $\triangle ABC$ に対して同じように定めた v が 0 にならないものが存在します（図 2 参照）．

具体的な γ で $v \neq 0$ となる $\triangle ABC$ を探してみてください．更に，円及び楕円の特徴づけになっていることを証明してください．

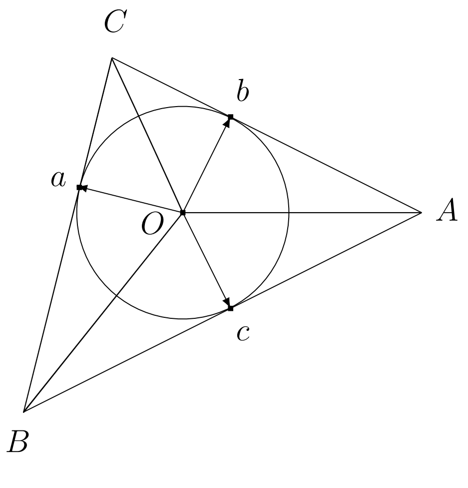

図 1

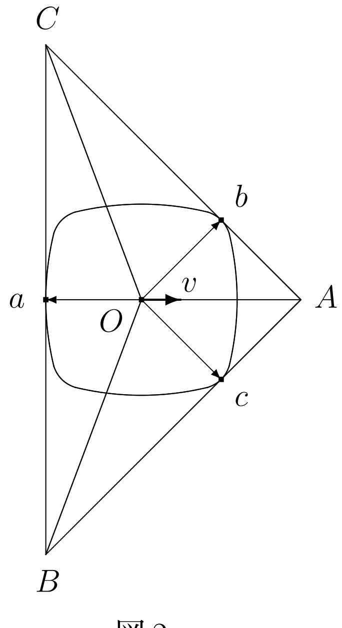

図 2

（問題作成：**1**（入谷），**2–4**（雪江），**5–7**（太田））