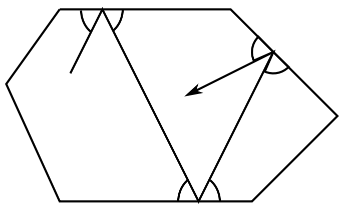
2013年度ガロア祭　懸賞問題[1]

問題 1　平面内の多角形 P の内部にある質点が，P の境界にぶつかるまで等速直線運動し，境界で弾性衝突 (「入射角=反射角」である反射) をした後また次に境界にぶつかるまで等速直線運動をする，という運動をするとき，その軌道を P の**ビリヤード軌道**と言います．ただし，頂点に到達してしまった (「ポケットに入った」) ときはそこで停止するものとします．



(1) P を直角二等辺三角形として，A を鋭角である頂点のひとつとします．このとき，A を出発して，A に戻ってくるビリヤード軌道は存在しないことを示して下さい．また，このような性質を持つ頂点が存在する三角形は他にあるでしょうか．

(2) P が一辺の長さが 1 の正方形であるとします．P のどこかの頂点から出発し，またどこかの頂点で終わるビリヤード軌道で，(折れ線としての) 長さが T 以下のものの数を $\lambda(T)$ と書くことにします (例えば，$0 < T < \sqrt{2}$ ならば，$\lambda(T) = 0$，$\sqrt{2} \leq T < \sqrt{3}$ ならば，各頂点を出発する対角線を考えると，$\lambda(T) = 4$ です)．

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{\lambda(T)}{T^2} = \frac{\pi}{\zeta(2)}$$

であることを示してください．ただし，$\zeta(s)$ は Riemann の ζ-函数

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$$

です．　P が他の多角形のとき，例えば，P が長方形であるときや，正 n 角形であるときにも $\lambda(T)$ を同様に定めたとすると，$\lim_{T\to+\infty} \lambda(T)/T^2$ は存在するでしょうか．存在するとしたら，その値はいくつになるでしょうか．また，同様の問題を立方体や正四面体における “3 次元ビリヤード” について考えた場合は，どうなるでしょうか．

---

[1]提出期限５月２７日（月）数学教室事務室まで．好きなだけ解答してください．一つの問題のある小問だけに解答することも可能です．

(3) 質点の運動が周期的になるとき，そのビリヤード軌道は**周期的**であると言います．鋭角三角形 P が与えられたとき，各頂点から下した垂線の足を結ぶと周期的ビリヤード軌道が得られることが知られています．また，この軌道と「平行」な周期軌道で，三角形の各辺にちょうど二回づつぶつかるものも存在することがわかります．まずこれらの事実を確認してください．さて，それ以外の周期的なビリヤード軌道を持たないような鋭角三角形はあるでしょうか．また，鈍角三角形の場合，そもそも周期的なビリヤード軌道はいつも存在するでしょうか．(実は，これは有名な未解決問題です．)

問題２　実数直線上の整数点 $X_0 = x \in \mathbb{Z}$ から出発し，コインを繰り返し投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1 だけ進む乱歩 (ランダムウォーク) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．すなわち，$n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + 1 & (n\,\text{回目のコイン投げが表のとき}) \\ X_{n-1} - 1 & (n\,\text{回目のコイン投げが裏のとき}) \end{cases}$$

によって帰納的に $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定まっている．この乱歩に関する確率を，出発点 x を明示して P_x と表す．例えば，出発点 1 の乱歩が時刻 $n = 4$ の時点で負である確率を求めると

$$\begin{aligned} P_1(X_4 < 0) =& P_1\Big((X_1, X_2, X_3, X_4) = (2,1,0,-1), (0,1,0,-1), \\ & \qquad (0,-1,0,-1), (0,-1,-2,-1), (0,-1,-2,-3)\Big) \\ =& \frac{5}{16} \end{aligned}$$

である．原点出発の乱歩が初めて原点に戻るまでにかかる時間，式で書くと

$$T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$$

で定まる T_0，を**再帰時間**と呼ぶ．(但し，便宜上，$\inf \emptyset = \infty$ と約束する．)

(1) $n = 1, 2, 3$ に対し，$P_0(T_0 = 2n)$ の値を計算してください．

(2) 実は，公式 $P_0(T_0 \leq 2n) = 2P_1(X_{2n} < 0)$ が成り立ちます．$n = 1, 2, 3$ に対して両辺の値を計算し，公式を確かめてください．

(3) 上の公式を認めて，$P_0(T_0 \leq 2n)$ および $P_0(T_0 = 2n)$ の一般式を求めてください．

(4) 実は，$s \in (0,1)$ に対して公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} P_0(T_0 = 2n) = 1 - \sqrt{1-s^2}$$

が成り立ちます．この公式を認めて，$P_0(T_0 = 2n)$ の一般式を求めてください．

問題３　$(0,\infty)$ 上の非負連続関数 $r(t)$ であって，任意の $\alpha > 0$ に対し

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha t}) r(t) dt = \sqrt{2\alpha}$$

を満たすようなものを考える．

(1) 定数 $c > 0$ と $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて $r(t) = ct^{\beta}$ の形をしているものの中でそのような関数を一つ見つけてください．

(2) そのような関数は上のものに限ることを示してください．必要なら，次の事実 (ラプラス変換の一意性) を用いて構いません: 二つの非負連続関数 $f(t)$ と $g(t)$ について，任意の $\alpha > 0$ に対し

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(t) dt < \infty$$

が成り立つならば，$f(t)$ と $g(t)$ とは恒等的に等しい．

問題４　オイラーは 2 次多項式 $f(x) = x^2 - x + 41$ に自然数 $x = 1, 2, 3, \ldots$ を順番に代入すると，多くの値が素数になることを発見しました．これに関連して次の問題を考えてみましょう．一部の問題だけに解答しても構いません．

(1) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(10)$ が素数になることを確かめてください．また，$f(k)$ が素数でないような自然数 k が無限個存在することを示してください．

(2) 任意の 2 次多項式 $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ に対し，$x = k$ を代入すると素数にならない自然数 k が無限個存在することを示してください．n 次多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ ではどうでしょうか．

(3) 1 次以上の 2 変数多項式 $h(x, y)$ であって，任意の自然数 a, b に対して $h(a, b)$ が素数となるものは存在しますか．3 変数以上ではどうでしょうか．

(4) 自然数を順番に代入すると多くの値が素数になる多項式を $x^2 - x + 41$ 以外に探してみましょう．例えば，2 次多項式であって，最初の 50 個の値が素数になるものは存在しますか．3 次以上の多項式ではどうでしょうか．自由に考えてみてください．

問題５　(1) 実解析的な定幅曲線で円以外のものを挙げてください．ただし，実解析的な曲線とは局所的に実解析的な関数の組 $(f(t), g(t))$（ただし $f'(t)$ および $g'(t)$ が同時にゼロになることはない）によるパラメータ表示 $x = f(t)$，$y = g(t)$ を持つ曲線のことです．また定幅曲線とはどの傾きの平行線で挟んでも幅が等しい閉曲線です（つまり転がしたときに一定の高さとなります）．

(2) 定幅曲線全体の中で実解析的なものは，C^0 位相に関して稠密であることを示してください．つまり任意の定幅曲線 K と任意に与えた正の数 ϵ に対してある実解析的な定幅曲線 K_{an} が存在して

$$\sup\{\inf\{\|p-q\| : p \in K_{\mathrm{an}}\} : q \in K\} < \epsilon$$
$$\sup\{\inf\{\|p-q\| : q \in K\} : p \in K_{\mathrm{an}}\} < \epsilon$$

が成立するということです．

問題６　$a, b > 0$ を二つの実数とし，

$$a_1 = a, \quad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

として数列 $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ を定めるとき，これらは同じ極限値

$$\mathrm{M}(a, b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

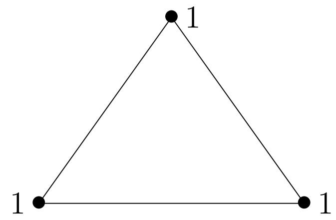
を持つことが知られています．これを a と b の算術幾何平均といいます。それでは $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を二つの行列とするとき，A と B の算術幾何平均は定義できるでしょうか？　定義できるとすればそれはどのような性質を持つでしょうか？　いろいろ考えてみて下さい．

問題７　ループする辺（同じ頂点同士を結ぶ辺）を持たない連結グラフであって，各頂点 i にある正の数 $c_i > 0$ をうまく対応させると，関係式

$$2c_i = \sum_{j\text{ は } i \text{ とある辺で結ばれる}} c_j$$

が全ての頂点 i に対して成り立つようにできるグラフを分類せよ．ただし上式の右辺の和において i と j が２つ以上の辺で結ばれている場合 c_j は辺の数だけ重複して足すものとする．

例としては次のようなグラフが挙げられる．数字は各頂点に割り当てられた正の数 c_i を表す．



問題８　逆２乗則の中心力の下での n 次元の Schrödinger 方程式

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}+V(r)\psi=E\psi$$

の解の構造をできるだけ詳しく調べよ．(エネルギー準位，角運動量，解空間の次元など.）ただし $\psi=\psi(x_1,\ldots,x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の時間に依存しない波動関数で

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(x_1,\ldots,x_n)|^2dx_1\cdots dx_n<\infty$$

を満たし，E は実数（エネルギー），

$$V(r)=-1/r,\qquad r:=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

は逆２乗則の力を与えるポテンシャルとする．($n=3$ のときはどの教科書にも載っているので $n\geq 4$ の場合を考えよ.）

(問題作成 : 問題１：浅岡正幸，問題２，３：矢野孝次，問題４：伊藤哲史，問題５：塩田隆比呂，問題６：池田保，問題７，８：入谷寛）