京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ。

［記号］

以下の問題で Z, R, C はそれぞれ整数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ $A^2+E_2=0$ をみたす 2 次実正方行列 A の例を 1 つ与えよ．また，$B^2+E_3=0$ をみたす 3 次実正方行列 B は存在しないことを示せ．ここで，E_2, E_3 は各々 2 次，3 次の単位行列を表す．

$\boxed{2}$ $C^1([0,1])$ の函数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は次の条件をみたしているとする．

(i)　ある正の数 M が存在して，$|u_n(x)|<M$.

(ii)　任意の正の数 ϵ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$p, q \geq N \text{のとき} \qquad \max_{0\leq x\leq 1}\left|\frac{d}{dx}u_p(x)-\frac{d}{dx}u_q(x)\right|<\epsilon$$

となる．

このとき，$\{u_n(x)\}$ の部分列 $\{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して，$0\leq x\leq 1$ 上で微分可能な函数 $u(x)$ に収束し，

$$\frac{d}{dx}u(x)=\lim_{j\to+\infty}\frac{d}{dx}u_j(x) \qquad (0<x<1)$$

となることを示せ．

$\boxed{3}$ A, B を n 次実正方行列とする．

$$P\in GL_n(\mathrm{C}) \text{があって} \qquad B=PAP^{-1}$$

となったとすると，

$$Q\in GL_n(\mathrm{R}) \text{が存在して} \qquad B=QAQ^{-1}$$

となることを示せ.

$\boxed{4}$ k を可換体, x, u, v を不定元とし, $\varphi(u) = x^2, \varphi(v) = x^3$ で決まる環準同型 $\varphi : k[u, v] \to k[x]$ を考える. このとき,

(1) $\ker\varphi$ を求めよ.

(2) φ は全射でないことを示せ.

(3) $R = k[u, v]/\ker\varphi$ の商体が, $k(x)$ に一致することを示せ.

$\boxed{5}$ $\mathbf{R}$ は実数全体とする. $f(x, y)$ は x と y の実係数の n 次斉次式とする. $n \geq 1$ のとき $f(x_0, y_0) \neq 0$ となる点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ は函数 $f(x, y)$ の正則点である, すなわち

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$$

であることを示せ.

$\boxed{6}$ 区間 $I = [0, 1]$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{nk} e^{2\pi\sqrt{-1}kx} \qquad (x \in I)$$

で与えられていて, 次の条件をみたすものとする.

(i) $\displaystyle\sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_{nk}| < \infty$,

(ii) 各 $x \in I$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する.

このとき,

(1) $\displaystyle C_{nk} = \int_0^1 f_n(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}kx} dx$ であることを示せ.

(2) 各 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} C_{nk}$ が存在することを示せ.

$\boxed{7}$ n を 2 以上の整数とし, $g(x)$ は複素数 $\mathbf{C}$ に係数を持つ $n-1$ 次の多項式とする. $g(x)$ は重根を持たないと仮定し, $g(x)$ の根を $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$

とする．$a \in \mathbf{C}$ について，$f_a(x) = ax^n + g(x)$ とおく．$|a|$ が十分小さい各 $a \neq 0$ に対して，$f_a(x)$ の根を$\gamma_1(a), \ldots, \gamma_n(a)$ と適当に番号付ければ

$$\lim_{a \to 0} \gamma_i(a) = \gamma_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \qquad \lim_{a \to 0} \gamma_n(a) = \infty$$

となることを示せ．

数学 II

⊗ 問題は８題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{8}$ の４題である．

⊗ この８問題中，<u>３問題</u>を <u>２つ以上の分野群</u> から選択して解答せよ．ただし$\boxed{8}$ は$\boxed{8a}$, $\boxed{8b}$ のうちどちらか一問を選択すること．$\boxed{8a}$, $\boxed{8b}$ の二問を同時に選択したときは$\boxed{8}$ の選択は無効になる．

［記号］

以下の問題で $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ整数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 標数が２でない可換体 K 上の n 変数多項式環を $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, $n+1$ 変数多項式環を $K[X_1, \ldots, X_n, Y]$ で表す．多項式 $F = F(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ の元の２乗にはなっていないと仮定する．剰余環

$$R = K[X_1, \ldots, X_n, Y]/(Y^2 - F(X_1, \ldots, X_n))$$

を考える．このとき次の問に答えよ．

(1) R は整域であることを示せ．

(2) 多項式環 $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ が正規環であることを利用して R が正規環であるための必要十分条件は F が２乗因子を持っていないことであることを示せ．

（注：整域 R がその商体の中で整閉であるとき R を正規環という．）

$\boxed{2}$ L は可換体 F の有限次 Galois 拡大体で

$$(*)\quad \mathrm{Gal}(L/F) \simeq GL(2, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

とする．ただし p は素数である．$GL(2, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ の部分群 H_1，H_2 を

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times,\ c \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \right\} \\ H_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \right\} \end{aligned}$$

と定義する．同型 $(*)$ により $\mathrm{Gal}(L/F)$ を $GL(2, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ と同一視し，H_1，H_2 に対応する L の部分体をそれぞれ K_1，K_2 とする．このとき次の問に答えよ．

(1) K_1 から L の中への F 同型 σ が与えられたとき，$\mathrm{Gal}(L/F)$ の元 τ で τ の K_1 への制限が σ に一致するものは何個あるか．

(2) K_1 から K_2 の中への F 同型の数を求めよ．

$\boxed{3}$ $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底，$\langle\ ,\ \rangle$ を標準的な内積とする．$\mathbf{R}^n$ の原点を中心とする $(n-1)$ 次元単位球面 S^{n-1} から自分自身への写像 $\varphi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\varphi(x) = e_1 - 2\langle e_1, x\rangle x \quad (x \in S^{n-1})$ で定義する．このとき次の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in S^{n-1}$ について $\varphi(-x) = \varphi(x)$ であることを示せ．

(2) $-e_1$ は φ の正則値であることを示せ．

(3) φ の写像度を求めよ．

$\boxed{4}$ 2 以上の自然数 n に対して $(2n-1)$ 次元単位球面 S^{2n-1} から n 次元単位球面 S^n への C^∞ 級 写像 $f : S^{2n-1} \to S^n$ を考える．S^n の C^∞ 級 n 次微分形式 α に対して $d\omega = f^*\alpha$ となる S^{2n-1} 上の C^∞ 級 $(n-1)$ 次微分形式 ω が存在する．この微分形式 ω について次を示せ．

(1) $H(f) = \displaystyle\int_{S^{2n-1}} d\omega \wedge \omega$ は ω の取り方によらない．

(2) n が奇数ならば $H(f) = 0$ である．

(3)　f と f' が C^∞ 級の意味でホモトピックならば $H(f)=H(f')$ である．

$\boxed{5}$　$L^2[\,0,1\,]$ の閉部分空間 E のすべての元が $[\,0,1\,]$ 上連続，すなわち $E\subset C[\,0,1\,]$ のとき，E は有限次元であることを示せ．

$\boxed{6}$　実数 $a,b>0$ に対して $L^2(\mathbf{R})$ 上の射影作用素 S，T を

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x), & |x|\le a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$$

$$Tf(x) = \int_{-b}^{b} e^{2\pi i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi$$

で定める．ただし $\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i\xi x}f(x)dx$$

である．このとき次を示せ．

(1)　TS はコンパクト作用素である．

(2)　TS の固有値 λ,μ が共に 0 でなく $\lambda\neq\mu$ ならば，λ，μ に属する固有関数は互いに直交する．

(3)　TS の 0 でない固有値を重複度をこめて $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\le 4ab$$

である．

$\boxed{7}$　$\mathbf{R}^d$ 内のルベーグ可測集合 E の測度を $m(E)$ で表す．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ の有界列で，$u_n\in L^2(\mathbf{R}^d)$ は

$$\Delta u_n=f_n$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} m(\operatorname{supp} u_n)=0$$

を満たすとする．このとき $L^2(\mathbf{R}^d)$ のノルム を $\|\ \ \|$ で表せば

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし

$$\Delta = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2$$

であり，Δu_n，$\mathrm{supp}\, u_n$ は distribution の意味で考える．

$\boxed{8}$ 次の $\boxed{8a}$ と $\boxed{8b}$ の2問のうちいずれか1問を選択して解答せよ．（2問とも解答した場合は解答は無効になる．）

$\boxed{8a}$ R は $0 \leq R \leq 3$ をみたす定数とする．$f(x)$ は閉区間 $[\,0, \pi\,]$ 上の滑らかな実数値関数で $f(0) = f(\pi) = 0$ をみたすものとし，$u = u(t,x)$ は $\{(t,x) \mid 0 \leq t,\ 0 \leq x \leq \pi\}$ で定義された滑らかな実数値関数で，初期境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + Ru & (\,0 < t,\ 0 < x < \pi\,) \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = 0 & (\,0 < t\,) \\ u(0,x) = f(x) & (\,0 < x < \pi\,) \end{cases}$$

の解とする．次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi u^2 dx$ は有界であることを示せ．

(2) 解 u の $t \to +\infty$ での漸近挙動を調べよ．

$\boxed{8b}$ f，g を $\mathbf{R}^2$ 上定義された滑らかな関数とし，ある正の定数 C_1，C_2 が存在して，任意の $(x,y), (x',y') \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x,y)| + |g(x,y)| &\leq C_1, \quad f(0,0) = g(0,0) = 0 \\ |f(x,y) - f(x',y')| &\leq C_2(|x-x'| + |y-y'|) \\ |g(x,y) - g(x',y')| &\leq C_2(|x-x'| + |y-y'|) \end{aligned}$$

が成り立つとする．ノルム $\|h\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |h(x)|$ により完備な距離空間

$$X = \{h : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid |h(x) - h(x')| \le |x - x'|,\ |h(x)| \le 1,\ h(0) = 0\}$$

をとり，$h \in X$ と $x_0 \in \mathbf{R}$ に対し $x(t) = x(t, x_0, h)$ を $\dfrac{dx}{dt} = f(x, h(x))$, $x(0) = x_0$ の解とする．また，定数 α が $C_1 \le \alpha$ かつ $4C_2 \le \alpha$ を満たすとする．次の問に答えよ．

(1)　作用素 T を

$$(Th)(x_0) = -\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds$$

で定めるとき，T は X を X に写すことを示せ．

(2)　$T : X \to X$ は縮小写像であることを示せ．

(3)　h_* を X における T の唯一の不動点とするとき，$y = h_*(x)$ のグラフはベクトル場 $(x, y) \mapsto (f(x, y), \alpha y + g(x, y))$ の不変曲線であることを示せ．

(連続な関数 u, v と非負定数 C について

$$u(t) \le v(t) + \int_0^t Cu(s)ds \quad (t \ge 0)$$

ならば

$$u(t) \le v(t) + \int_0^t Cv(s)e^{C(t-s)}ds \quad (t \ge 0)$$

が成り立つことを用いてよい．)

英語

問題は 2 題ある。2 題とも解答せよ。

辞書を用いてもよい。

[1] 次の文章は，A. Weil: The mathematics curriculum (A short guide for students) の一部である．

1．段落 a) を和訳せよ．
2．段落 b) を和訳せよ．
3．段落 c) の大意を数行以内にまとめて書け．