京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ。

$\boxed{1}$ 2 次の実正方行列 A に対して A^2+E は零行列か正則行列であることを示せ。ただし、E は 2 次の単位行列である。

$\boxed{2}$ 実数上で定義された微分可能な実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して $a<b$ のとき

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

を満足する実数 $\xi \in (a,b)$ が存在することを示せ。

$\boxed{3}$ 実 $m\times\ell$ 行列 A および 実 $n\times m$ 行列 B は $BA=0$ を満たすと仮定する。$X=A{}^tA+{}^tBB$ に対して次の問に答えよ。ただし ${}^t(\quad)$ は転置行列を表す。

(1) $\mathrm{Im}\,A=(\mathrm{Ker}\,{}^tA)^{\perp}$ を示せ。ただし $^{\perp}$ は $\mathbf{R}^m$ のユークリッド計量に対する直交補空間を表す。

(2) $\mathbf{R}^m$ のベクトル $v={}^t(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ に対して $Xv=0$ が成り立つことと ${}^tAv=Bv=0$ が成り立つこととは同値であることを示せ。

(3) $\mathrm{Ker}\,B=\mathrm{Im}\,A\oplus\mathrm{Ker}\,X$ (直和) を示せ。

$\boxed{4}$ 2 以上の整数 n に対して級数 $S_n(x)$ を次式で定義する。

$$S_n(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-2)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$$

ただし $0!=1$ と定める。このとき次の (1), (2) を示せ。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)^2} - S_n(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}.$

(2) $x > -1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\boxed{5}$ $n \geq 2$ のとき、n 次対称群 Σ_n を n 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ に成分の置換、すなわち $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ として作用させる。このとき次の問に答えよ。

(1) Σ_n の作用と可換な $\mathbf{C}^n$ 上の線型変換の全体は 2 次元のベクトル空間をなすことを示せ。

(2) $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間

$$\begin{aligned} T &= \{ (x_i) \in \mathbf{C}^n \mid \text{総ての } i, j \text{ に対して } \quad x_i = x_j \}, \\ H &= \{ (x_i) \in \mathbf{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \} \end{aligned}$$

はそれぞれ既約な Σ_n 不変部分空間であり、$\mathbf{C}^n = T \oplus H$ (直和) となることを示せ。

$\boxed{6}$ 2 次のユニタリ群 $U(2)$ および 2 次の特殊ユニタリ群 $SU(2)$ に関して次の問に答えよ。

(1) $U(2), SU(2)$ の中心を求めよ。

(2) $U(2)$ と $S^1 \times SU(2)$ は位相空間として同相であるが、群としては同型でないことを示せ。ただし $S^1 = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}$ である。

$\boxed{7}$ 複素平面 $\mathbf{C}$ 全体で正則 (holomorphic) な関数 f が二乗可積分、すなわち

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty$$

であるならば f は恒等的に 0 であることを示せ。

数学 II

⊗　問題は８題あり、次の３つの分野群に分かれる。分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題、分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題、分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{8}$ の４題である。

⊗　この８問題中, 3問題を 2つ以上の分野群 から選択して解答せよ。ただし $\boxed{8}$ は $\boxed{8a}$、$\boxed{8b}$ のうちどちらか一問を選択すること。$\boxed{8a}$、$\boxed{8b}$ の二問を同時に選択したときは $\boxed{8}$ の選択は無効になる。

$\boxed{1}$　$SL(n, \mathbf{Z})$ の位数が有限である元 A を考える。A の位数を e, $e \geq 2$ とするとき、次の問に答えよ。

(1)　$n \geq 2$ を一つ固定すると、e の取りうる値は有限個であることを示せ。

(2)　$n = 2$ のとき、A を全て求めよ。

$\boxed{2}$　体 K を係数とする多項式 $f(X) \in K[\,X\,]$ の次数を $d \geq 2$ とし、$f_n(X), n \geq 1$ を

$$f_1(X) := f(X), \quad f_n(X) := f(f_{n-1}(X)), \quad (n \geq 2)$$

と定義する。多項式 $f_n(X)$ の K 上の最小分解体を K_n と記し、さらに次の条件 $(*)$ を仮定する。

$(*)$　任意の $n \geq 1$ に対して $f_n(X)$ は重根を持たない

このとき次の問に答えよ。

(1)　一般に K_n $(n \geq 2)$ は K_{n-1} を含むか？　正しければ証明を、正しくなければ例を挙げて説明せよ。

(2)　$d = 2$ のとき、$G := Gal(K_n/K)$ の位数 $|G|$ は 2^ν, $\nu < 2^n$ となることを示せ。

$\boxed{3}$　3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内に

$$S = \{\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 - a)^2 + (y^2 - a)^2 + (z^2 - a)^2 = b^2\ \}$$

を考える。ただし a, b は $0 < a < b < \sqrt{2}a$ を満足する定数とする。写像 $f : S \to \mathbf{R}^3$ を $(x, y, z) \in S$ に対して $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ で定める。このとき次の問に答えよ。

(1)　S は向き付け可能で境界のないコンパクト 2 次元多様体であることを示せ。

(2)　f の臨界値を決定せよ。

(3)　S および $f(S)$ のオイラー数を求めよ。

$\boxed{4}$　(1) n 次元複素射影空間 $\mathbf{P}_n$ (ただし $n \geq 1$ と仮定する) に対して

$$X_n = \{ (x, v) \in \mathbf{P}_n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid v \in x, \|v\| = 1 \}$$

とおく。ここで、$\mathbf{P}_n$ は $n+1$ 次元複素ベクトル空間の 1 次元部分空間の全体とする。このとき次の問に答えよ。

(a)　X_n は S^{2n+1} と同相であることを示せ。

(b)　$\pi : X_n \to \mathbf{P}_n$ を $\pi(x, v) = x$ で定義するとき、$\pi \circ s = id_{\mathbf{P}_n}$ を満足する C^∞ 級写像 $s : \mathbf{P}_n \to X_n$ が存在するか。存在すれば写像を具体的に与え、存在しなければその理由を記せ。

(2)　$n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} Y_n &= \{ (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|v_1\| = \|v_2\| = 1, v_1 \perp v_2 \} \\ S^n &= \{ v \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1 \} \end{aligned}$$

とおき、写像 $q : Y_n \to S^n$ を $q(v_1, v_2) = v_1$ で定義する。このとき、$q \circ s = id_{S^n}$ を満足する C^∞ 級写像 $s : S^n \to Y_n$ が存在するための必要十分条件は n が奇数であることを示せ。

$\boxed{5}$　Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素 T_n, $n = 1, 2, \ldots$, T, S が与えられ、T_n は T に強収束し (すなわち、任意の $x \in H$ に対して $\lim_{n \to \infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ が成り立つ)、S はコンパクト作用素であるとする。このとき次の問に答えよ。

(1)　$\{T_n S\}_{n=1}^{\infty}$ は TS にノルム収束する (すなわち、単位球面上で一様収束する) ことを示せ。

(2) T_n がすべて対称ならば、$\{ST_n\}$ は ST にノルム収束することを示せ。

(3) $H = \ell^2$ のとき、$T_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$,
$S(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, 0, 0, \ldots)$ とおくと、$\{T_n\}$ は 0 に強収束すること、および $\{ST_n\}$ は ST にノルム収束しないことを示せ。

$\boxed{6}$ $\mathbf{R}^2$ 上の急減少関数の空間 $\mathcal{S}$ 上の線形形式 T, T_θ を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
\langle T, \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(0, y) dy \quad (\psi \in \mathcal{S}) \\
\langle T_\theta, \psi \rangle &= \langle T, \psi \circ u_\theta \rangle \quad (\psi \in \mathcal{S})
\end{aligned}
$$

ここに、

$$
u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

は $\mathbf{R}^2$ 上の回転である。このとき、次の問に答えよ。

(1) $T_\theta \in \mathcal{S}'$ を示せ。さらに集合 $V = \{T_\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\}$ に対して、$\mathcal{F}(V) = V$ であることを示せ。ただし、$\psi \in \mathcal{S}$ に対して

$$
(\mathcal{F}\psi)(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy
$$

と定義して、$\mathcal{S}'$ の元のフーリエ変換を定める。

(2) $\mathbf{R}^2$ 上の局所可積分関数 f が

$$
f(rx, ry) = \frac{1}{|r|} f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2, r \in \mathbf{R} \setminus \{0\})
$$

を満たすとき、f は自然に $\mathcal{S}'$ の元を与えることを示せ。

(3) (2) における $f \in \mathcal{S}'$ に対し、そのフーリエ変換 $\mathcal{F}f$ を f を用いて具体的に表せ。

$\boxed{7}$ 実数 q $(0 < q < 1)$ を固定し、正方行列に値を取る関数 $W(z)$ が以下の性質を持つと仮定する。

(i) 円環 $1 \le |z| \le q^{-1}$ の近傍で、$W(z)$ は $z = a$ に、$W(z)^{-1}$ は

$z=b$ に 1 位の極を持つほかは正則である。ただし、

$$a \neq b, \quad 1 < a, b < q^{-1}$$

と仮定する。

(ii)

$$W(qz) = q^{D_+} W(z) q^{-D_-}, \quad (\ |z| = q^{-1}\ )$$

を満足する定数正方行列 $D_\pm$ が存在する。ここで正方行列 M に対して q^M を

$$e^{(\log q\, M)}$$

と定義する。

(iii) $|z|=1$ の上で

$$W(z) = Y_+(z)^{-1} Y_-(z)$$

が成り立つ。ここで $Y_+(z)$ および $Y_+(z)^{-1}$ は $|z| \leq 1$ の近傍で正則、$Y_-(z)$ および $Y_-(z)^{-1}$ は $1 \leq |z| \leq \infty$ の近傍で正則とする。

このとき次の問に答えよ。

(1) $Y_\pm(z)$ および $Y_\pm(z)^{-1}$ は $0 < |z| < \infty$ で有理型関数に解析接続出来ることを示し、その極の位置を求めよ。

(2) $Y(z) = Y_\pm(z) z^{D_\pm}$ が共に

$$Y(qz) = (A + \frac{B}{z-a}) Y(z)$$

を満足するような定数正方行列 A, B が存在することを示せ。ここで正方行列 M に対して z^M を

$$e^{(\log z\, M)}$$

と定義する。

$\boxed{8}$ 次の $\boxed{8a}$ と $\boxed{8b}$ の２問のうちいずれか１問を選択して解答せよ。
（２問とも解答した場合は解答は無効になる。）

$\boxed{8a}$ 次の境界値問題を考える。

(1) 有界連続関数 $f(x)$ および $a(x) \geq 0$ に対して、境界値問題

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u + a(x)u = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

の解は一意的に存在し、次の不等式を満たすことを示せ。

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 \right\} dx \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$$

(2) 任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して、境界値問題

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u + u^3 = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

は少なくとも一つ解があることを示せ。

$\boxed{8b}$ $\mathbf{R}^2$ 上の常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t \in \mathbf{R}, \quad u = (u_1, u_2)$$

において、$f = (f_1, f_2)$, $f_j \in C^1(\mathbf{R}^2)$ とし、かつ任意の初期値 $x \in \mathbf{R}^2$ に対し、$\mathbf{R}$ 上で解 $u = \varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))$ を持つと仮定する。このとき次の問に答えよ。

(1) 点 $x_0 \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t_n, x_0) = x_0$$

を満足する数列 $t_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$ が存在するとき、x_0 は平衡点または周期点であることを示せ。ただし、点 x_0 は $f(x_0) = (0, 0)$ となるとき平衡点、$\varphi(T, x_0) = x_0$ を満たす $T > 0$ が存在するとき周期点であるという。

(2)　点 $y_0 \in \mathrm{R}^2$ の任意の近傍 U に対して $\varphi(t, U) \cap U \neq \emptyset$ を満たすいくらでも大きい $t > 0$ が存在するとき、y_0 は平衡点または周期点であるか。正しければ証明を、正しくなければ例を挙げて説明せよ。

英語

⊗ 辞書を用いてもよい.

$\boxed{1}$ 次は A. Weil 著；Souvenirs d'apprentissage の英訳本の一節で、Bourbaki 誕生に関わる部分である. 全文を和訳せよ.

Awaiting me upon my return to Strasbourg were Henri Cartan and the course on "differential and integral calculus," which was our joint responsibility – here I had escaped being saddled with "general mathematics." We were increasingly dissatisfied with the text traditionally used for the calculus course. Because Cartan was constantly asking me the best way to treat a given section of the curriculum, I eventually nicknamed him the Grand Inquisitor. Nor did I, for my part, fail to appeal to him for assistance. One point that concerned him was the degree to which we should generalize Stokes' formula in our teaching.

This formula is written as follows:

$$\int_{b(X)} \omega = \int_X d\omega$$

where ω is a differential form, $d\omega$ its derivative, X its domain of integration, and $b(X)$ the boundary of X. There is nothing difficult about this if for example X is the infinitely differentiable image of an oriented sphere and if ω is a form with infinitely differentiable coefficients. Particular cases of this formula appear in classical treatises, but we were not content to make do with these.

In his book on invariant integrals, Elie Cartan, following Poincaré in emphasizing the importance of this formula, proposed to extend its domain of validity. Mathematically speaking, the question was of a depth that far exceeded what we were in a position to suspect. Not only did it bring into play the homology theory, along with de Rham's theorems, the importance of which was just becoming apparent; but this question is also what eventually opened the door to the theory of distributions and currents and also to that of sheaves. For the time being, however, the business at hand for Cartan and me was teaching our courses in Strasbourg. One winter day toward the end of