京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ。

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 は、E (単位行列), A, A^2 の一次結合で書けることを示せ。

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}$ 上の実数値函数 $f(x)$ を考える。函数 $|f(x)|$ が $x=a$ で微分可能で、$f(x)$ が $x=a$ で連続ならば、$f(x)$ も $x=a$ で微分可能であることを示せ。

$\boxed{3}$ (1) 実数係数の $m \times n$ 行列 A, B について、

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank}(A+B)$$

を示せ。

(2) E_n を n 次単位行列とし、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

とする。X が $2n$ 次の実交代行列 (${}^tX = -X$) を動くとき、$\operatorname{rank}(X+A)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ $\mathbf{R}$ 上の周期函数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ があって、函数 $f(x)$ に $\mathbf{R}$ 上広義一様収束しているとする。$f(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ならば、$f_n(x)$ の周期 $T_n > 0$ は

$$\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$$

を満たすことを示せ。ここで $g(x)$ が周期函数であるとは、非定数函数であって、任意の x に対し $g(x+T) = g(x)$ を満たす $T > 0$ が存在することとし、そのような正で最小の T を周期という。

$\boxed{5}$ 有理数体 $\mathbf{Q}$ の元 d に対して

$$M_d = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta d \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{Q} \right\}$$

とおく。

(1) M_d は行列環 $M(2, \mathbf{Q})$ の部分環であることを示せ。

(2) M_d が体になるための条件を求めよ。

(3) M_d が体であるとき、体としての自己同型群を求めよ。

$\boxed{6}$ D^2, S^1 はそれぞれ単位円板とその境界の単位円とする。任意の可微分写像 $f : D^2 \to S^1$ に対して、可微分写像 $g = f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ は特異点（g の微分が 0 になる点）を持つことを示せ。

$\boxed{7}$ $f(x)$ は実直線上の可測函数であって、任意の x に対して $f(x+1) = f(x)$ かつ $f(2x) = f(x)$ が成り立ち、さらに $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$ であるとする。このとき 0 でない任意の整数 n に対して

$$\int_0^1 e^{2\pi i n x} f(x) dx = 0$$

となることを示せ。

数学 II

⊗ 問題は８題あり、次の３つの分野群に分かれる。分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題、分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題、分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{8}$ の４題である。

⊗ この８問題中, 3問題 を 2つ以上の分野群 から選択して解答せよ。

$\boxed{1}$

(1) 可換体 K 上の零でない二変数多項式 $f(x,y)$, $g(x,y) \in K[x,y]$ が共通因子を持たないとき, $f(x,y)$, $g(x,y)$ が二変数多項式環 $K[x,y]$ で生成するイデアル $I = (f(x,y), g(x,y))$ は $F(x)$, $G(y)$ の形の元を含むことを示せ。ただし $F(x) \neq 0$, $G(y) \neq 0$ とする。(ヒント. $K(x)$ を K 上の一変数有理関数体とするとき $K[x,y] \subset K(x)[y]$ と考えられる。)

(2) $0 < b < a < 1$ のとき $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ が実数体 $\mathbf{R}$ 上の多項式環 $\mathbf{R}[x,y]$ で生成するイデアル $I = (f(x,y), g(x,y))$ を含む $\mathbf{R}[x,y]$ の極大イデアル M をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 可換体 F の有限次分離的代数拡大体 L を考える。$L = F(\theta)$ と書き θ の F 上の最小多項式を $f(x)$ と記す。L が F の Galois 拡大体であるための必要十分条件は、拡大 L/F の任意の中間体 K に対して $f(x)$ が $K[x]$ で次数の等しい既約多項式に分解することであることを示せ。

$\boxed{3}$ S^n を n 次元球面、$T^n = \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{個}}$ を n 次元トーラスとする。

(1) $S^n \times S^n$ から T^{2n} への連続写像の写像度のとりうる値を決定せよ。

(2) T^{2n} から $S^n \times S^n$ への連続写像の写像度のとりうる値を決定せよ。

ただし n は 2 以上の自然数とする。

$\boxed{4}$ M をコンパクトで向きづけ可能な、空でない境界を持つ可微分多様体、∂M をその境界とする。このとき可微分写像 $f : M \to \partial M$ で $f|_{\partial M} = 1|_{\partial M}$ となるものが存在するか。

$\boxed{5}$ 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を満たすもの全体を B とし、$\mathrm{x} = \{x_n\} \in B$ に対しノルムを

$$\|\mathrm{x}\| = \sup_n |x_n|$$

で定める。B は Banach 空間となる（証明しなくてよい）。$\mathrm{y} = \{y_n\} \in B$ を、任意の自然数 n に対し $y_n \neq 0$ となるものとし、固定しておく。y を用いて線形作用素 $T : B \to B$ を

$$\left(T\mathrm{x}\right)_n = y_n x_n$$

で定める。

(1) T はコンパクトな作用素であることを示せ。

(2) $U = \{\mathrm{x} \mid \|\mathrm{x}\| \leq 1\}$ とするとき、$T(U)$ はコンパクトではないことを示せ。

$\boxed{6}$ R 上の関数 $f(x)$ は、ある $C > 0$ に対し条件

$$\int_{\mathrm{R}} |x^n f(x)|\, \mathrm{d}x \ \leq\ C\, n! \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすものとする。このとき次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathrm{R}} f(x) e^{-ix\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$$

は $\xi = 0$ で解析的であることを示せ。

(2)

$$\int_{\mathrm{R}} x^n f(x)\, \mathrm{d}x = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすような $f(x)$ は一意的に存在することを示し、その $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{7}$　$D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 2\}$ 上正則で $|f(z)| < |z|$ を満たす関数の族を $\mathcal{F}$ とし、

$$I(f) = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z - f(z)}$$

とおく。（積分は単位円周上正の向きにとる。）f が $\mathcal{F}$ を動くとき、$I(f)$ の取り得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$　次の $\boxed{\text{8a}}$ と $\boxed{\text{8b}}$ の２問のうちいずれか１問を選択して解答せよ。（２問とも解答した場合は不利な扱いを受ける。）

$\boxed{\text{8a}}$　領域 $[0,1] \times [0,1]$ 上の連続的微分可能な関数 $K(x,y)$ および区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f_0(x)$ を考えて、次の列を定める。

$$f_{n+1}(x) = \int_0^1 K(x,y) f_n(y)\,\mathrm{d}y \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

今

$$\sup_n \max_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| < \infty$$

を仮定するとき、次が成り立つことを示せ。

(1)　$[0,1]$ 上の任意の連続関数 $g(x)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

が存在するならば、$[0,1]$ 上のある連続関数 $f(x)$ があって

$$\lim_{n \to \infty} \max_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

かつ

$$f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

をみたす。

(2)　$\{f_n(x)\}$ が各点収束しない $K(x,y)$ と $f_0(x)$ の例を作れ。

$\boxed{\text{8b}}$ 次の形の関数を考える。

$$w(k,x) = \left(k^N + a_1(x)k^{N-1} + \cdots + a_N(x)\right)\, e^{kx}$$

(1) $w(k,x)$ は何回でも微分可能であるとし、

$$v(k,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x) - k^2\right) w(k,x)$$

とおいたとき、

$$v(k,x) = P(k,x)e^{kx}, \qquad P(k,x) \text{ は } k \text{ の } N-1 \text{ 次多項式}$$

が成り立つように $u(x)$ を定めよ。

(2) $p_1, \cdots, p_N$ を相異なる正の実数とするとき、条件

$$w(p_i, x) = w(-p_i, x) \qquad (1 \le i \le N)$$

を満たす $w(k,x)$ がただひとつ存在することを示せ。

(2) 上の $w(k,x)$ に対して $u(x)$ を (1) のように定めると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x)\right) w(k,x) = k^2 w(k,x)$$

が成り立つことを示せ。