京　都　大　学

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ。

$\boxed{1}$ x は実数を動くとする。

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

の階数（rank A）を求めよ。

(2) rank A が最小のとき、A^2 を計算せよ。

(3) (2) のとき、A の最小多項式を求めよ。

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}$ 上の函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する：

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(x+\frac{1}{n}) & -\frac{1}{n} \le x \le 0, \\ -n^2(x-\frac{1}{n}) & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

$g(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の連続函数であるとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x$$

を求めよ。

$\boxed{3}$ 函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \quad x > 0$$

を複素平面から実軸の負の部分を除いた領域へ解析接続（解析延長）した函数を $F(z)$ とする。

極限値

$$g(\xi) = \lim_{\eta \to +0} \mathrm{Im}\{F(-\xi - i\eta) - F(-\xi + i\eta)\}$$

を、$0 < \xi < 1,\ \xi > 1,$ の場合に求めよ。

$\boxed{4}$ k を体、$M_n(k)$ を k 上の n 次正方行列全体の作るベクトル空間とする。$M_n(k)$ の部分ベクトル空間 V が次の性質をみたすとする。

V の 0 でない任意の行列 A は正則行列である。

このとき

(1) $\dim_k V \leq n$ を示せ。

(2) k が実数体 $\mathbf{R}$ で $n = 2$ のとき、$\dim_{\mathbf{R}} V = 2$ となる V の例を作れ。

$\boxed{5}$ p を素数とし、k を位数 p の有限体とする。

(1) k 上の n 次一般線型群 $G = GL(n, k)$ の位数を求めよ。

(2) G の p-Sylow 群の位数を求めよ。

(3) G の p-Sylow 群を 1 つ求めよ。

$\boxed{6}$ 単位円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ の上の 1 次微分形式

$$\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

を考える。ω は完全形式か？

ただし ω が完全形式であるとは、S^1 上の C^∞- 級函数 f があって $\omega = \mathrm{d}f$ となることである。

$\boxed{7}$ $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ の閉集合 E は、Lebesgue 測度 μ について $0 < \mu(E) < \infty$ であるとする。このとき $0 < a < \mu(E)$ を満たす任意の a に対し、$\mu(K) = a$ なるコンパクト集合 $K \subset E$ が存在することを示せ。

(2)　$\mathbf{Q}$ において b は平方数ではないが $b(a^2-4b)$ が平方数である場合には、$G \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ である。

(3)　もし b も $b(a^2-4b)$ も $\mathbf{Q}$ において平方数でなければ、G は位数 8 の群である。

$\boxed{3}$ $O(n)$ は n 次直交群、S^{n-1} は $\mathbf{R}^n$ の単位球面とする。直交行列 $A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ に対し、その第 1 番目の縦ベクトル $\mathbf{a}_1$ を対応させる写像を $p: O(n)\to S^{n-1}$ と表す。このとき、次の 2 つの命題が同値であることを示せ。

(イ)　球面 S^{n-1} の接ベクトル束は自明束と同型である。

(ロ)　$p\circ s = id$ をみたす連続写像 $s: S^{n-1}\to O(n)$ が存在する。

$\boxed{4}$ (1) X は有限複体とし、$\chi(X)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{rank}\, H_i(X;\mathbf{Z})$ とおく。但し、$H_i(X;\mathbf{Z})$ は X の整係数ホモロジー群である。このとき

$$\chi(X)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbf{Q}} H_i(X;\mathbf{Q})=\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbf{F}_2} H_i(X;\mathbf{F}_2)$$

が成り立つことを示せ。但し、$\mathbf{Q}$ は有理数体、$\mathbf{F}_2$ は標数 2 の素体である。

(2)　M は奇数次元の境界のないコンパクト、連結な可微分多様体で、かつ、有限複体であるとする。このとき $\chi(M)=0$ を示せ。

(3)　M は 3 次元の境界のないコンパクト、連結な可微分多様体で、かつ、有限複体であるとする。M が向き付け可能でないなら、M の 1 次元ベッチ数は 0 でないことを示せ。

$\boxed{5}$ $g(x)$ を $[0,1]$ 上の実数値 2 乗可積分函数とし、

$$f(x)=\int_0^x g(y)\mathrm{d}y \qquad (0\leq x\leq 1)$$

と定める。

(1)　さらに

$$g_n(x)=n\sum_{k=1}^{n} 1_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(x)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

とおく。ただし $1_{[a,b)}(x)$ は区間 $[a,b)$ の定義函数とする。このとき

$$\int_0^1 g_n(x)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x$$

を示せ。

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)^2$$

が存在して $\int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x$ に等しいことを示せ。

$\boxed{6}$ H を Hilbert 空間とし、その内積を $(\ ,\ )$ で表す。H 上での有界で自己共役な線型作用素 T が、$\|T\| = 1$ （$\|T\|$ は T の作用素ノルム）かつすべての $x \in H$ に対して、$(Tx, x) \geq 0$ をみたしているとする。

(1) 作用素列 $\{T^n\}$ は強収束することを示せ。

(2) 作用素列 $\{T^n\}$ が作用素ノルムでは収束しないような例を作れ。

$\boxed{7}$ $P(z)$ を多項式とし、$f(z)$ は $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ において正則とする。

(1)

$$g(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{P(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\pi i} \qquad (|z| > 2)$$

とおくとき、

$$g(z) = Q(z) - P(z) f(z), \quad Q(z) \text{ は多項式}$$

と表せることを示せ。

(2) 特に $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\alpha$ （α は複素数）とするとき、$w(z) = g(z)/f(z)$ に対し

$$\Delta(z) = (z^2 - 1) f(z) \begin{vmatrix} \frac{dP}{dz} & \frac{dw}{dz} \\ P(z) & w(z) \end{vmatrix}$$

は多項式であることを示せ。

(3) (2) においてさらに

$$\oint_{|\zeta|=2} \zeta^k P(\zeta) f(\zeta) \mathrm{d}\zeta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \deg P - 1$$

数学 II（専門科目）

⊗　問題は8題あり、次の3つの分野群に分かれる。分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の2題、分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の2題、分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{8}$ の4題である。

⊗　この8問題中, 3問題 を 2つ以上の分野群 から選択して解答せよ。

$\boxed{1}$　有限群の作用について以下のことを示せ。

(1)　複素数体 C 上の（有限次元とは限らない）ベクトル空間 V に、有限群 G が線型に作用しているとする。G- 不変な部分ベクトル空間 W が与えられているとき、部分ベクトル空間 W' で G- 不変かつ $V = W \oplus W'$ となるものが存在することを示せ。

(2)　A と A' は可換な C- 代数とし、有限群 G が A と A' に C- 代数の同型として作用しているとする。A^G, A'^G でそれぞれ A, A' の G- 不変な元のなす部分代数を表わすものとする。C- 代数の G- 準同型 $f : A \to A'$ が全射のとき $A'^G = f(A^G)$ であることを示せ。

(3)　自然数 n に対して H は C の中で1の n 乗根のなす群とする。$G = H \times H$ の多項式環 $\mathrm{C}[x, y]$ への C- 代数としての作用を $(\alpha, \beta) \in G$ について

$$x \to \alpha x, \quad y \to \beta y$$

となるように定める。この作用は剰余環

$$R = \mathrm{C}[x, y]/(x^n + y^n - 1)$$

への G の作用を導くが、R の G- 不変な元のなす部分代数 R^G が C 上の一変数多項式環になることを示せ。

$\boxed{2}$　$f(X) = X^4 + aX^2 + b$ を Q 上の既約多項式とする。また、Q 上での $f(X)$ のガロア群を G と表す。このとき次の事柄を証明せよ。

(1)　もし b が Q において平方数ならば、$G \cong \mathrm{Z}/2\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$ である。

を仮定するとき、$\Delta(z)$ は無限遠点の近傍で有界で、したがって定数であることを示せ。

$\boxed{8}$ 次の $\boxed{8a}$ と $\boxed{8b}$ の2問のうちいずれか1問を選択して解答せよ。（2問とも解答した場合は不利な扱いを受ける。）

$\boxed{8a}$ $\mathbf{R}^2$ での常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = \mu y + g(x,y)$$

を $0 < t < \tau$ で、条件 $x(0) = x_0,\ y(\tau) = y_1$ のもとで考える。ここで定数 $\mu,\ \lambda$ は $\lambda < 0 < \mu$ であり、$\mathbf{R}^2$ 上の C^2- 函数 $f,\ g$ は原点で一階微分まで零であるとする。

このとき、$\delta > 0$ を十分小さくとると、$|x_0| < \delta,\ |y_1| < \delta$ をみたす任意の $x_0,\ y_1$ と、任意の $\tau > 0$ に対し、

$$\max_{0\le t\le \tau}(\max\{|x(t)|, |y(t)|\}) < 2\delta$$

となる解が一意的に存在することを示せ。

$\boxed{8b}$ $f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の連続的微分可能な函数で、ある正数 M に対し

$$|f(x,y)| \le M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M$$

を満足している。このとき常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) & x > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

を考えると、$0 \le x \le 1$ において滑らかな解 $y(x)$ を一意的に持つ。

各 n に対して $0 \le x \le 1$ を n 等分して $x_j = x_j^{(n)} = \frac{j}{n}$ $(0 \le j \le n)$ とし、

$$\begin{cases} y_j - y_{j-1} = \frac{1}{n} f(x_j, y_j) & (1 \le j \le n) \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

によって $y_j = y_j^{(n)}$ $(0 \le j \le n)$ を定めたい。

(1) n が十分大きいとき $\{y_j\}_{j=0}^n$ は一意的に定まることを示せ。