京　都　大　学

数学 I

◎ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

・但し，数理解析専攻志願者は $\boxed{1}$ または $\boxed{2}$ のかわりに $\boxed{A}$ を解答してもよい.
数学専攻としては，$\boxed{A}$ は評価しないので，注意すること.

$\boxed{1}$ 位相群（ハウスドルフの分離公理をみたすものとする）G について，次の命題はそれぞれ正しいか.　正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ.

（1）　G の中心 $Z(G)$ は閉部分群である.

（2）　G の単位元の弧状連結成分 G_0 は正規部分群である.

（3）　H_1，H_2 が G の閉部分群であるとき，H_1，H_2 で生成された部分群も閉部分群である.

$\boxed{2}$ 次の命題はそれぞれ正しいか.　正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ.

（1）　Hが群 G の部分群で，その指数 n が $2 < n < \infty$ のとき，G の正規部分群 Nで，$N \neq G$，Nの G での指数 $\leq \dfrac{n!}{2}$ をみたすものがある.

（2）　Kが体，n が偶数の時，Kの n 次分離拡大体 L は，少なくとも1つKの2次拡大体を含む.

$\boxed{3}$　$K(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で定義された C^1級の函数で，$K(x)$，$K'(x)$ が共に有界であり，さらに次の条件もみたされている:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0, A \to +\infty} \left(\int_{-A}^{-\epsilon} \frac{K'(x)}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{A} \frac{K'(x)}{x}\, dx \right) = 1.$$

このとき，$f(x)$ が C^1級函数で，ある有限区間の外で 0 となるならば，

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{K'(\lambda x)}{x} f(x)\,dx = f(0)$$

であることを示せ.

$\boxed{4}$ 連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で, $f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}^c$ かつ $f(\mathbf{Q}^c) \subset \mathbf{Q}$ となるものは存在しないことを示せ. ただし, $\mathbf{Q}^c$ は $\mathbf{R}$ での $\mathbf{Q}$ の補集合を表す.

$\boxed{5}$ A, B は n 次複素正方行列で $\det A \neq 0$ とする. 複素数 z に対し, $AB = zBA$ ならば, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことを示せ.

(i) $B^n = 0$.

(ii) n 以下のある自然数 m に対して $z^m = 1$.

$\boxed{\mathrm{A}}$ 次の n 次行列式を $F_n(x)$ とする.

$$F_n(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

このとき, 任意の自然数 a , n に対し, $F_{(a+1)n+a}(x)$ は $F_a(x)$ で割り切れることを示せ.

数学II（専門科目）

◎ 問題は 1 2 ある.

その内, 分野群［a］の問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの7題, ［b］の問題は $\boxed{8}$ の1題, ［c］,［d］の問題はそれぞれ2題であって,

［c］ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$

［d］ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

◎ この 1 2 問題中，<u>3 問題</u> を選択せよ．

・但し，数学専攻としては，分野群 [c], [d] の問題は評価しないので注意すること．

$\boxed{1}$ 有理数体 Q の代数拡大体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt[6]{3} + \sqrt{-3})$ について，次の問いに答えよ．

(1) Kを含む最小の Q 上の Galois 拡大 K^*は Kと一致するかどうか．

(2) K^*の Q 上の Galois 群を求めよ．

(3) K^*の部分体のうち，Q 上 6 次拡大であるものをすべて求めよ．

$\boxed{2}$ 多項式 $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ が与えられたとする． 任意の代数的整数 a に対して，$f(a)$ が代数的整数になるならば，$f(X) \in \mathbf{Z}[X]$となることを示せ． ここで，Q は有理数体，Z は有理整数環を表す．

$\boxed{3}$ 標数 2 の体 k上の多項式環 $k[x, y, z]$ に derivation d （k-linear, $d(ab) = adb + bda$ ）が

$$dx = x(x + y + z), \qquad dy = y(x + y + z), \quad dz = z(x + y + z)$$

で与えられている． このとき，

(1) $d^2 = 0$ を示せ．

(2) Ker d を求めよ．

(3) $k[x, y, z]$ の d に関する homology の環構造を決定せよ．

$\boxed{4}$ Xは基点 x_0をもつ位相空間，$I = [0, 1]$ は単位閉区間とする． 連続写像 $f : I \times I \to X$で，

$$f(0, t) = f(1, t) = x_0, \quad f(t, 0) = f(t, 1), \quad t \in I$$

をみたすもの全体を $\mathcal{F}_2(X, x_0)$ とする． $\mathcal{F}_2(X, x_0)$ の写像の間のホモトピー $f_0 \simeq$

f_1 は $f_t \in \mathcal{F}_2(X, x_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$ によって与えられるものとする.

$f, g \in \mathcal{F}_2(X, x_0)$ の積 $f \cdot g \in \mathcal{F}_2(X, x_0)$ を

$$(f \cdot g)(s, t) = \begin{cases} f(2s, t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1, t) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

で定義すると，この積はホモトピー類の集合

$$\tau_2(X, x_0) = \mathcal{F}_2(X, x_0)/\simeq$$

における積を誘導して，$\tau_2(X, x_0)$ は群となる.（証明不要）

(1) 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ と２次元ホモトピー群 $\pi_2(X, x_0)$ について，次の完全系列があることを示せ.

$$1 \to \pi_2(X, x_0) \xrightarrow{\alpha} \tau_2(X, x_0) \xrightarrow{\beta} \pi_1(X, x_0) \to 1$$

(2) $\beta \circ \gamma = id$ となる準同型写像 $\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \tau_2(X, x_0)$ があって，

$$\gamma(\omega)\alpha(x)\gamma(\omega)^{-1} = \alpha(x^\omega), \quad \omega \in \pi_1(X, x_0),\ x \in \pi_2(X, x_0)$$

が成り立つことを示せ．但し，x^ω は ω の x への作用の結果を表す.

$\boxed{5}$ X は線形ノルム空間で，f は X 上の０でない線形汎関数とする.

(1) x_0 は X の元で $f(x_0) \neq 0$ とする. 任意の $x \in X$ に対し，$\alpha \in \mathbf{C}$ と $y \in N(f) = \{y \in X; f(y) = 0\}$ が一意に定まり，$x = \alpha x_0 + y$ と表されることを示せ.

(2) 次の (a) または (b) を証明せよ.

(a) f が連続でなければ，$N(f)$ は X で稠密である.

(b) $N(f)$ が X の閉部分空間ならば，f は連続である.

$\boxed{6}$ f は複素平面の領域 D で正則で，かつ単葉，すなわち任意の $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ に対して $f(z_1) \neq f(z_2)$，とする.

$z_0 \in D$として

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)(z - z_0)}$$

とおいたとき，以下を示せ.

(1) φ は Dで有界正則である.

(2) $D = \mathbf{C} - (\{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \,; n = 1, 2, 3, \ldots\})$ とするとき，φ は定数，従って fは一次変換である.

[7] Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}, dx)$ を考える. $a > 0$ とする. $g \in \mathcal{H}$ に対し，

$$(K_a g)(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} g(y)\, dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

とおく. 次を示せ.

(1) K_aは，$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素であって，その作用素ノルムは1以下である.

(2) $a \to +0$ のとき，任意の $g \in \mathcal{H}$ に対し，$K_a g$ は $\mathcal{H}$ のノルムに関して g に収束する.

(3) K_aは，$a \to +0$ のとき，$\mathcal{H}$上の恒等作用素 Iに，作用素ノルムの意味では，収束しない.

[8] 次の２問（８－１，８－２）のうちいずれか１問を選択せよ.（２問を解答した場合は不利な扱いを受ける.）

８－１.　常微分方程式の境界値問題

$$(*) \begin{cases} \dfrac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0 \end{cases}$$

を考える. ここで $f(x)$ は $[0,1]$ 上２回連続的微分可能とする. この近似解を差分法を用いて構成することを考える. 区間 $[0,1]$ を N 等分して，$h = 1/N$とし，

$$x_j = jh, \qquad j = 0, 1, \ldots N,$$

によって分点を定め，その分点上の差分解を $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ と表すことにして，$(*)$ の差分近似として次を採用する.

$$(**)\begin{cases} \dfrac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ u_0 = 0, \qquad u_N = 0 \end{cases}$$

ここで

$$f_j = f(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

(1) 差分法 $(**)$ が一意に解けて，

$$|u_i| \leq \max_{1 \leq j \leq N-1} |f_j|, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

をみたすことを示せ.

(2) $(*)$ の真の解 $u(x)$ と $(**)$ の差分解 $(u_1, \ldots, u_{N-1})$ との分点での誤差を

$$e_j = u(x_j) - u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1$$

によって定義する時，次を示せ.

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \leq j \leq N-1} |e_j| = 0.$$

8－2． 梁(はり)のモデル方程式

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \left\{ -\mu + \int_0^\pi \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \right\} \frac{d^2 w}{dx^2} = \lambda p(x), \qquad 0 < x < \pi,$$

を考える．ここで μ は横からの圧力，$p(x)$ は上からの荷重，λ はその大きさを示す．境界条件は

$$w(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = w(\pi) = \frac{d^2 w}{dx^2}(\pi) = 0$$

で与えられるとし，荷重は次で与えられるとする:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x.$$

$\mu = 5$ の場合に，$\lambda \in \mathbf{R}$ による解の数と形を調べよ． ただし，解は $[0, \pi]$ で滑らかなもののみを考える．

$\boxed{9}$ コンパクトな台をもつ（すなわち有限領域を除いて0の）ポテンシャル $V(x)$ に関する1次元 Schrödinger 方程式

$$\{-\frac{1}{2m}(\frac{d}{dx})^2 + V(x) - E\}\psi(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

を考える． ただし，$m > 0$，$E > 0$．

$k = \sqrt{2mE}$ とおくと，$V(x) = 0$ の領域での解は，c_+, c_- を定数として

$$c_+ e^{ikx} \ + \ c_- e^{-ikx}$$

と書けるが，$|c_+|^2, |c_-|^2$ は，確率的な意味で，それぞれ正方向，負方向に走る粒子数に比例するものと解釈できる． 今 $x = -\infty$ のみから粒子が入射する場合を考え，上の解釈に基づいて反射率 r と透過率 t を定義し，次の2つのポテンシャル $V(x)$ について

$$r + t = 1$$

が成立することを示せ．

（1）井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V & (|x| \leq d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

ただし，$V > 0, d > 0$． $\psi(x)$ は $x \neq \pm d$ で Schrödinger 方程式を満たし，$x = \pm d$ では1回連続微分可能である．

（2）$V(x)$ が無限回微分可能，かつ $|x| > d$ で $V(x) = 0$． ただし，$x > d$ または $x < -d$ における任意の解が全領域での解に一意に延長できることを仮定してよい．

$\boxed{10}$ Proca 場 $U_\mu(x)$ の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu)(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu) + \frac{1}{2}m^2 U^\mu U_\mu$$

で与えられる．ただし，$m > 0$（定数）．

（１） U_μの場の方程式を導け．

（２） 正準量子化し，同時刻交換子 $[U_\mu(x), U_\nu(y)]|_{x^0=y^0}$，$[\partial_0 U_\mu(x), U_\nu(y)]|_{x^0=y^0}$ を計算せよ．

（３） 4次元交換子 $[U_\mu(x), U_\nu(y)]$ を，不変デルタ関数$\Delta(\xi)$ を用いて表せ．ただし，$\Delta(\xi)$ は次の Cauchy 問題により定義される：

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Delta(\xi) = 0$$

$$\Delta(\xi)|_{\xi^0=0} = 0$$

$$\partial_0 \Delta(\xi)|_{\xi^0=0} = -\delta^3(\xi)$$

[記号の説明] ギリシャ添字は $0, 1, 2, 3$ を動く．添字に対しては Einstein の規約（１つの項に２度同じ添字が現れる場合には和をとる）を適用する． Minkowski 計量 $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ は

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \qquad \mu \neq \nu \text{のとき } g_{\mu\nu} = 0$$

で定義される．添字の上げ下げはそれぞれ $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$を用いて行う（例：$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$）．

略記：$\partial_\mu A = \partial A(\xi)/\partial \xi^\mu$,

$\delta^3(\xi) = \prod_{k=1}^{3} \delta(\xi^k)$（$\delta$は Dirac のデルタ関数）．

11 整数の一次元の配列 a とその大きさ n が与えられたとき，a の連続した部分列の中で要素の和が最大となるもののうちの一つの開始位置 (from) と長さ (size) を求めるプログラムを書け．ただし，プログラムは n に比例した計算時間で終了しなければならない．（プログラムの文法の厳密性は要求しない．）

プログラムは Pascal, FORTRAN, Lisp または C で書け．それぞれ次のような形で始まる手続きとして書くこと．また，プログラムの正しさと計算時間の条件をみたすことを簡単に示せ．

☆
```
procedure largestsum(a:array[0..10000] of integer;
                     n:integer; var from, size:integer)
```

☆
```
SUBROUTINE LSUM(A, N, FROM, SIZE)
INTEGER A(1), N, FROM, SIZE
```

☆
```
(defun largestsum (a n)
   from と size のリストを返す． )
```

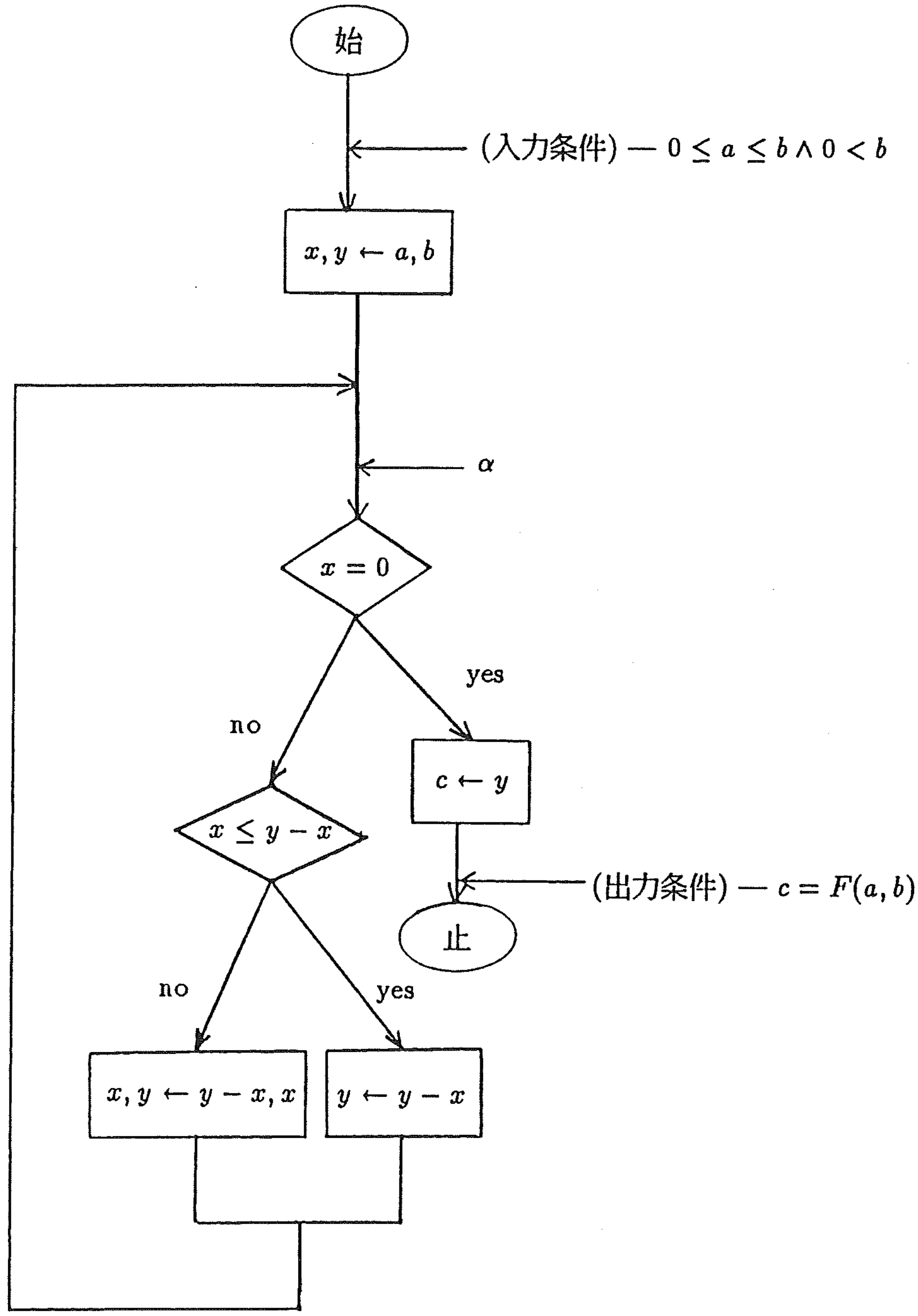
☆
```
largestsum(a, n, from, size)
int a[], n, *from, *size;
```

(Lisp の場合は，(aref a i) で a の第 i 要素が求まるとする．）

12 次のページの図のプログラムについて以下の問いに答えよ．

（1） 図のプログラムが停止するとき，変数 c はどんな値をもつか．（出力条件として与えた $c = F(a, b)$ の F はどんな関数か答えよ．）

（2） 図のプログラムの α に適当な帰納的表明 (loop invariant, inductive assertion) を与え，このプログラムが上記入力条件のもとに走るとき，必ず停止し，問題（1）の出力条件をみたすことを証明せよ（厳密な議論をせよ）．



(注: a, b, c, x, yはすべて整数型の変数)