平成14年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 4時間 である.

⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ 方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

で定まる $\mathbb{R}^4$ の部分空間の基底を求めよ．

$\boxed{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_1^{2^n} t^{-1+\frac{1}{n}} \cos t \, dt = 0$$

であることを示せ．

$\boxed{3}$ V を有限体上の n 次元ベクトル空間とする．$0 \leq m \leq n$ に対して V の m 次元部分空間の数を $s(m)$ とおく．$s(m) = s(n-m)$ を示せ．

$\boxed{4}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一回連続微分可能とする．$\lim_{x\to\infty} \{f(x) + xf'(x)\} = 0$ ならば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であることを示せ．

$\boxed{5}$ 無限体 K 上の 0 でない n 変数多項式 $F(X_1, \ldots, X_n)$ を考える．このとき，K^n の元 $(a_1, \ldots, a_n)$ で $F(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ となるものが存在することを示せ．

$\boxed{6}$ X, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ とおく．このとき，f が連続であるための必要充分条件は G_f が $X \times Y$ の中で閉集合であることを示せ．

$\boxed{7}$ 平面領域 D 上の正則函数の列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上で広義一様に函数 $f(z)$ に収束するとき，$f(z)$ は正則であることを示せ．

訂正

平成14年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は7題あり，次の3つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の2題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の2題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の3題である．

⊗　この7問題中, 3問題 を 2つ以上の分野群 から選択して解答せよ．

⊗　解答時間は 4時間 である．

⊗　参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する．

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと．
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．
4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 単位元 1 を持つ可換環 A のイデアル I について，A の元 a がイデアル I の根基 $\sqrt{I}$ に含まれるための必要十分条件は，A 上の一変数多項式環 $A[T]$ の中で I と $1-aT$ が生成するイデアルが 1 を含むことであることを示せ．

$\boxed{2}$ 標数 0 の可換体 F の代数的閉包を $\overline{F}$ と記す．$\overline{F}$ の部分体 L に対して $\overline{F}$ に含まれる L の有限次アーベル拡大体全ての合成体を L_{ab} と記す．

$\overline{F}$ に含まれる F の全ての有限次拡大体 K に対して，K_{ab} は F_{ab} と K の合成体になるという性質を体 F が持つとする．このとき，$F_{ab}=\overline{F}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ n 次ユニタリ群 $U(n)$ に対して $M=\{\,A\in U(n)\,;\ A^2=E\,\}$ とおく．ここで E は n 次単位行列である．このとき次の問に答えよ．

(1) M の連結成分はいくつあるか．

(2) M の各連結成分は $U(n)$ の部分多様体であることを示せ．

$\boxed{4}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= (x,z,y)\\
f_2(x,y,z) &= (-x,z,y)\\
f_3(x,y,z) &= (y,z,x)
\end{aligned}
$$

によって定義される 3 種類の自己同相写像を考える．これらの写像で移りあう点を同一視して得られる $\mathbb{R}^3$ の商空間をそれぞれ X_i, $(i=1,2,3)$ と記す．X_i は互いに同相かどうか理由を付けて答えよ．

実

5 内積 $(\ ,\ )$ を持つ Hilbert 空間 H のノルムを $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ で定める．A を H の閉凸部分集合とし，任意の $x \in H$ に対し，$d(x,A) = \inf\{\|x-y\|; y \in A\}$ と定める．

(1) $\|x - z\| = d(x,A)$ をみたす $z \in A$ が一意に存在することを示せ．この z を $P(x)$ と記すことにする．

(2) 任意の $x \in H$ と 任意の $y \in A$ に対し $(x - P(x), P(x) - y) \geq 0$ が成立することを示せ．

6 $L^2(I)$ $(I = (0,1) \subset \mathbb{R})$ の函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x)\, dx = 0, \quad \forall g \in L^2(I)$$

かつ，ほとんどすべての $x \in I$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

を満たせば，ほとんどすべての $x \in I$ に対し

$$f(x) = 0$$

が成立することを示せ．

7 円環領域 $\Omega = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ での Laplace 方程式の第一種境界値問題を考える：

(i) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$

(ii) $u|_{x^2+y^2=1} = f,$

(iii) $u|_{x^2+y^2=4} = g.$

ここで $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ であり，f, g は周期 2π の一回連続的微分可能な関数とする．このとき次に答えよ．

(1) Laplace 方程式を極座標 (r,θ) で表示せよ．

(2) 問題に適した (r,θ) に関する変数分離解をすべて求めよ．

(3) 境界値問題 (i) (ii) (iii) の解を求め，それが実際に (i) (ii) (iii) を満たすことを示せ．