京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ．

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 複素数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \log(\sin x)dx$ が存在することを示せ．

$\boxed{3}$ $A = (a_{ij})$ は n 次複素正方行列とし、双線型写像 $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を

$$B(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

と定める．ただし、$\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ である．

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\, \mathrm{x} \in \mathbb{C}^n \mid B(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \quad \forall \mathrm{y} \in \mathbb{C}^n \,\} \\ V_2 &= \{\, \mathrm{y} \in \mathbb{C}^n \mid B(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{C}^n \,\} \end{aligned}$$

とおくとき、$\dim V_1 = \dim V_2$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ 閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$ を示せ．

$\boxed{5}$ $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ は準同型写像とする．このとき次を示せ．

(1) f が全射なら $|\det(f)| = 1$

(2) f が単射なら $|\det(f)| = \#(\mathbb{Z}^n / f(\mathbb{Z}^n))$．ただし $\#(G)$ は群 G の位数を表す．

$\boxed{6}$ 複素射影空間はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ．

$\boxed{7}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し、

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+i) = f(z)$$

をみたすとき、$f(z)$ は定数関数であることを示せ．

数学 II

問題は７題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［Ａ］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［Ｂ］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［Ｃ］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題である．

この７問題中，３問題を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ．

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 変数有理函数体 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ の $\mathbb{C}$ 上の自己同型 σ を

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &= x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \sigma(x_n) &= x_1 \end{aligned}$$

によって定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) σ による K の不変部分体 $F = \{ \alpha \in K \mid \sigma(\alpha) = \alpha \}$ に対して $K = F(\sqrt[n]{\alpha})$ を満足する $\alpha \in F$ を一つ求めよ．

(2) $n \geq 3$ であれば，(1) の条件を満たす $\alpha \in F$ は $x_1, \ldots, x_n$ の対称式にはとれないことを示せ．

$\boxed{2}$ 有理数体 $\mathbb{Q}$ の元を成分とする $n \times n$ 行列 S は対称行列でありかつ非退化と仮定する．このとき

$$O(S) = \{ g \in GL(n, \mathbb{Q}) \mid {}^t g S g = S \}$$

とおくと，$O(S)$ の全ての元と可換な $GL(n, \mathbb{Q})$ の元はスカラー行列に限ることを示せ．

ただし、S が非退化とは S に対応する２次形式が非退化なことである．

$\boxed{3}$ 次の命題が正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ．

(1) C^∞ 級多様体 M と M に埋め込まれた閉部分多様体（正則な閉部分多様体ともいう）S が与えられたとき，S 上の任意の C^∞ 級函数 f は M 上の C^∞ 級函数に拡張される．

(2) コンパクト連結 C^∞ 級多様体 M, N 間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ を考える．点 $x, y \in N$ は写像 f の臨界値でない（すなわち $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y)$ の全ての点で f の微分 df は全射である）とする．このとき x, y を結ぶ N の曲線 $C : [0,1] \to N$ で全ての $t \in [0,1]$ に対して $C(t)$ が f の臨界値でないものが存在する．

$\boxed{4}$ $SL(2,\mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が定める線型写像 $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は自然な写像 $f_A : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を誘導する．C^∞ 級多様体 W に対して $H^*(W)$ を実数係数のコホモロジーとするとき，次の問に答えよ．

(1) $f_A^* : H^*(T^2) \to H^*(T^2)$ を求めよ．

(2) M を $[0,1] \times T^2$ の同値関係

$$(0, x) \sim (1, f_A(x)), \quad x \in T^2$$

による商空間とするとき $H^*(M)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ $[0,\infty)$ 上の C^1 級函数 ψ とその導函数 ψ' はともに $[0,\infty)$ 上ルベーグ可積分であるとする．さらに f を $[0,\infty)$ 上の有界可測函数として次を示せ．

(1) $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0.$

(2) 極限

$$L := \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$$

が存在するとき，

$$\lim_{a\to+0} \int_0^\infty f(x)\psi(ax)dx = L\psi(0)$$

が成立する．

$\boxed{6}$ H をヒルベルト空間, $\{H_n\}$ を H の有限次元部分空間の増大列で, $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ は H で稠密であるとする. H から H_n への直交射影を P_n とかく. さらに H 上の有界作用素 T がすべての自然数 n に対して

$$\|TP_n - P_nT\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

をみたしているとする. ただし $\|\cdot\|$ は作用素ノルムを表わす. このとき次を示せ.

(1) $Q_n = P_n - P_{n-1}$ (ただし $P_0 = 0$) とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n T Q_n$ はある有界作用素に強収束する.

(2) すべての自然数 n に対して P_n と交換する T' と $\|K\| < 1$ をみたすコンパクト作用素 K が存在して $T = T' + K$ と表わすことができる.

$\boxed{7}$ $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ かつ $\operatorname{supp}\varphi$ は有界とする. $\varepsilon > 0$ に対し, $u_\varepsilon(x,t)$ を次で定義する:

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} ds \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}\right)\varphi(y,s).$$

このとき次を示せ.

(1) u_ε およびその偏導函数

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t),\ \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,t),\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,t),$$

は, $\varepsilon \to 0$ のとき, それぞれ連続函数に $\mathbb{R}^2$ で一様に収束する.

(2) $u_\varepsilon(x,t)$ の $\varepsilon \to 0$ のときの極限函数を $u(x,t)$ とおくと, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ であり, かつ方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = \varphi(x,t)$$

を満たす.