京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ．

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ A は複素 3 次正方行列でその最小多項式は x^2+x+1 であるとする．このとき $\det A - \operatorname{tr} A = 1$ であることを示せ．

$\boxed{2}$

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}}\,dx$$

は $\alpha > -1/2$ ならば収束することを示せ．

$\boxed{3}$ 閉区間 $[0,1]$ 上正の値を取る連続関数 $\omega(x)$ に対して，$c_n = \int_0^1 x^n \omega(x)\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とおく．任意の n について，行列

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{pmatrix} = \left(c_{i+j} \right)_{0 \le i,j \le n-1}$$

は可逆であることを示せ．

$\boxed{4}$ 閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数の列 $\{f_n\}$ が，f に一様収束すると仮定する．どの n に対しても f_n の像が $f_n([0,1]) = [0,1]$ を満足すれば，f の像に関しても $f([0,1]) = [0,1]$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ $k[x]$ で体 k 上の 1 変数多項式環を表す．f を $k[x]$ の 0 でない元で，$\deg(f) \ge 1$ と仮定する．

1)　$g \in k[x]$ に対して，線型写像 $\alpha : k[x]/fk[x] \to k[x]/fk[x]$ を $\alpha(\overline{\psi}) = \overline{g\psi}$ で定め，$R(f,g) = \det \alpha$ とおく．(ここで，$\phi \in k[x]$ に対して，$\overline{\phi}$ は ϕ の $k[x]/fk[x]$ での同値類を表している．) このとき，以下の 2 つは同値である事を示せ．

(a) f と g は互いに素である．

(b) $R(f,g) \neq 0$.

2) $f = f_1 \cdots f_r$ を f の分解で，任意の 2 つの因子 f_i, f_j $(i \neq j)$ は互いに素であると仮定する．このとき

$$R(f,g) = R(f_1,g) \cdots R(f_r,g)$$

を示せ．

6 $\mathbb{CP}^n$ で n 次元複素射影空間を表す．$(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に，$(1, z_1, \cdots, z_n)$ が生成する $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元部分ベクトル空間を対応させることで，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{CP}^n$ の部分集合とみなす．

1) P, Q を複素係数の 1 変数多項式とし

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

で，$f : \{ z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0 \} \to \mathbb{C}$ なる写像を定める．f は $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ なる C^∞ 級写像に拡張できることを示せ．

2)

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 + z_2},$$

で定まる写像 $g : \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \neq \pm z_2 \} \to \mathbb{C}$ は，$\mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ なる C^∞ 級写像に拡張できるか．

7 開単位円板 $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ 内に全ての零点を持つ n 次多項式 $(n \geq 2)$

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (a_i \in \mathbb{C})$$

を考える．

1)

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{P(z)}$$

を求めよ．

2)

$$\int_{\partial D} \frac{z^n\, dz}{P(z)}$$

を求めよ．

数学 II

問題は７題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［Ａ］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［Ｂ］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［Ｃ］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題である．

この７問題中，<u>３問題</u>を <u>２つ以上の分野群</u>から選択して解答せよ．

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ $\zeta = e^{2\pi i/85} \in \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R}$ とするとき，K の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群 $Gal(K/\mathbb{Q})$ を求めよ．

$\boxed{2}$ Noether 整域 R が唯一つの極大イデアルを持ちかつ極大イデアルが唯一つの元から生成されるとき，すなわち (R, tR) が局所 Noether 整域となるような元 $t \in R \setminus \{0\}$ が存在するとき，R を離散付値環と言い，t を離散付値環 R の素元と言う．離散付値環 R とその素元 t が与えられ，R の商体を K と記すとき以下の問に答えよ．

1)　自然数 n に対して $X^n - t$ は K 上の多項式環 $K[X]$ の中で既約であることを示せ．

2)　$R[X]/(X^n - t)R[X]$ は離散付値環になることを示せ．

$\boxed{3}$ 1)　K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

$$SL(n, K) = \{\, g \mid g \text{ は } K \text{ を成分とする } n \text{ 次正方行列で } \det g = 1 \,\}$$

と置く．$SL(n, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$（＝実数を成分とする n 次正方行列の全体の集合）の部分集合と見たとき部分多様体であることを示せ．また $SL(n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ の実部分多様体であることを示せ．

2)　$SL(n, \mathbb{R})$ 上の実数値函数 F を $F(g) = \mathrm{tr}\ g$ で定義する．F の臨界点，すなわち $dF_g = 0$ となる $g \in SL(n, \mathbb{R})$ をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 位相空間 X, Y に対して $X * Y$ は $X \times I \times Y$ の次の同値関係による商空間とする.（ただし $I = [0, 1]$ である.）

$$
\begin{aligned}
(x,0,y) &\sim (x',0,y), & x,x' \in X, \quad y \in Y \\
(x,1,y) &\sim (x,1,y'), & x \in X, \quad y,y' \in Y
\end{aligned}
$$

2 次元複素射影空間を $\mathbb{CP}^2$ と記すとき $\mathbb{CP}^2 * \mathbb{CP}^2$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

5 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対して $L^2(\Omega)$ での作用素 A を

$$
Af(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy
$$

で定める．ここに dy は $\mathbb{R}^2$ での Lebesgue 測度である．さらに $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega_\varepsilon(x) = \Omega \cap \{\, y \in \mathbb{R}^2 \,;\, |y-x| \geq \varepsilon \,\}$ とおき

$$
A_\varepsilon f(x) = \int_{\Omega_\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy
$$

と定める．このとき，次を示せ．

1) $\varepsilon \to 0$ のとき A_ε は A に作用素ノルムの意味で収束する．

2) A はコンパクト作用素である．

6 区間 $(0,1)$ 上の 2 乗可積分函数 $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ は，ある定数 $C > 0$ に対し

$$
\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx \leq C, \quad n = 1, 2, \ldots
$$

を満たしているとする．もし，ほとんどすべての x で

$$
f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)
$$

を満足する $f(x)$ があれば

$$
\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n \to \infty)
$$

が成り立つことを示せ．

7 摩擦により減衰する振り子の運動を記述する常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0 \quad (k > 0)$$

を，$y(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$ とおいて，平面上の常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - ky \tag{1}$$

と考える．

1) 定数ではない 2 変数函数 $L(x, y)$ であって，方程式 (1) の任意の解 $(x(t), y(t))$ に対し

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0$$

となるものを一つ求めよ．

2) 初期値 $(x(0), y(0)) = p = (p_1, p_2)$ から出る方程式 (1) の解を $(x_p(t), y_p(t))$ とすると，その $t \to \infty$ での極限点全体の集合

$\omega(p) = \{\, q \in \mathbb{R}^2 \mid (x_p(t_n), y_p(t_n)) \to q$ となる数列 $t_n \to \infty$ が存在する $\}$

は，函数 L の停留点集合

$$C_L = \{\, q \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d}{dt}L(x_q(t), y_q(t)) \equiv 0 \,\}$$

に含まれることを示せ。

3) 方程式 (1) の任意の解は $t \to \infty$ で定数に収束することを示せ．

外国語

問題は 2 題ある。2 題とも解答せよ。

1 次の文章を日本語訳せよ。

In the end we search out the beginnings. Established, beyond comparison, as the most important logician of our times by his remarkable results of the 1930s, Kurt Gödel was also most unusual in the ways of his life and mind. Deeply private and reserved, he had a superb all-embracing rational-