京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ．

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 有理数を成分とする奇数次正方行列 A で $A^2 = 2E$ を満たすものは存在しないことを示せ．ただし E は単位行列である．

$\boxed{2}$ 開区間 $(0,1)$ で一様連続な関数は有界な関数であることを示せ。

$\boxed{3}$ 実数体上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に標準的な内積を定義しておく．$n-1$ 個のベクトル

$$\mathrm{v}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

が一次独立であるとすれば，これらすべてと直交する 0 でないベクトルであって成分が x_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n-1)$ の多項式であらわされるものが存在することを示せ．

$\boxed{4}$ 関数 $\varphi(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続で $\varphi(1) = 0$ をみたすものとする．このとき関数列

$$f_n(x) = x^n \varphi(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

は $n \to \infty$ のとき $[0,1]$ において一様に 0 に収束することを示せ．

$\boxed{5}$ 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．可換環 $\mathbb{Q}[A]$ は $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に環として同型であることを示せ．

$\boxed{6}$ $\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数体 $\mathbb{C}$ のいずれかをあらわす．$\mathbb{K}^2$ 上に同値関係

$$(x, y) \sim (y, x)$$

を入れ，商空間 $\mathbb{K}^2/\sim$ を考える．このとき

1) $\mathbb{R}^2/\sim$ は $\mathbb{R}^2$ と同相か.

2) $\mathbb{C}^2/\sim$ は $\mathbb{C}^2$ と同相か.

それぞれ理由をつけて答えよ.

$\boxed{7}$ 複素平面の閉単位円板 D を含む領域で正則な関数 $f(z)$ に対して, $M = \max_{z\in D}|f(z)|$ とおく. このとき任意の $z \in D$ に対し

$$|f(z) - f(0) - f'(0)z| \leq 3M|z|^2$$

が成り立つことを示せ.

数学 II

問題は 7 題あり, 次の 3 つの分野群に分かれる. 分野群〔A〕の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の 2 題, 分野群〔B〕の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の 2 題, 分野群〔C〕の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の 3 題である.

この 7 問題中, 3 問題 を 2 つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ を係数とする多項式 $f = f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ は $f(0,0) = 0$ を満たすと仮定する。多項式 f が生成する複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の主イデアルを (f) と記し、x, y が生成する $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル (x,y) を $\mathfrak{p}$ と記す。環 A を

$$A = \mathbb{C}[x,y]/(f)$$

と定義し、x, y の定める A の元 $\overline{x}, \overline{y}$ が生成する A のイデアルを $\mathfrak{m}$ と記す。

1) $f \in \mathfrak{p}^\ell, f \notin \mathfrak{p}^{\ell+1}$ によって正整数 ℓ を定めるとき、f を掛けることによって引き起こされる環の準同型写像

$$\mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{p}^{n-\ell} \to \mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{p}^n$$

は正整数 n が ℓ より大きければ単射であることを示せ。

2) 正整数 n に対して同型

$$A/\mathfrak{m}^n \simeq \mathbb{C}[x,y]/\{\mathfrak{p}^n + (f)\}$$

が存在することを示せ。

3) 十分大きな正整数 n に対して、$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ は一定の値を取ることを示し、またその値を求めよ。

$\boxed{2}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 3 変数有理函数体 $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$ に 3 次交代群 A_3 が変数の添数の置換

$$X_i \mapsto X_{\sigma(i)}$$

で作用している。このとき以下の問に答えよ。

1) A_3 の 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}X_1 + \mathbb{C}X_2 + \mathbb{C}X_3$ への作用による表現を既約表現の直和に分解せよ。

2) 多項式環 $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ の A_3 の作用についての不変元の全体 $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]^{A_3}$ は $\mathbb{C}$ 上 4 個の元で生成されることを示せ。

3) 有理函数体 $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)$ の A_3 の作用についての不変元の全体 $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3)^{A_3}$ は $\mathbb{C}$ 上 3 個の元で生成されることを示せ。

$\boxed{3}$ 2 次の特殊ユニタリ群

$$SU(2) = \{\, A \in M_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = E_2, \quad \det A = 1 \,\}$$

（ただし E_2 は 2 次の単位行列であり、A^* は A の各成分を複素共役にしてできる行列 $\overline{A}$ の転置行列 ${}^t\overline{A}$ である）に関して次の問に答えよ。

1) $SU(2)$ は 3 次元球面と可微分同相であることを示せ。

2) 行列の積 $\mu : SU(2) \times SU(2) \to SU(2)$ から誘導されるドラームコホモロジーの準同型写像

$$\mu^* : H^*_{DR}(SU(2)) \to H^*_{DR}(SU(2) \times SU(2))$$

を求めよ。

3) $A \mapsto A^*$ から定まる写像 $\iota : SU(2) \to SU(2)$ から誘導されるドラームコホモロジーの準同型写像 $\iota^* : H^*_{DR}(SU(2)) \to H^*_{DR}(SU(2))$ を求めよ。

4) $\varphi(A, B) = ABA$ から定まる写像 $\varphi : SU(2) \times SU(2) \to SU(2)$ から誘導される準同型写像

$$\varphi^* : H^*_{DR}(SU(2)) \to H^*_{DR}(SU(2) \times SU(2))$$

を求めよ。

$\boxed{4}$ 次数 d の n 変数実係数多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)$, $(d \geq 2,\, n \geq 2)$ に対して

$$\tilde{f}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)$$

とおき、n 次元実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ の部分空間 X を

$$X = \{\, [x_0,x_1,\ldots,x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid \tilde{f}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = 0 \,\}$$

と定める。ただし、$[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ は $\mathbb{RP}^n$ の斉次座標である。また、

$$H_\infty = \{\, [x_0,x_1,\ldots,x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid x_0 = 0 \,\}$$

とおく。

1) 恒等的には 0 でない d 次斉次多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)$ （すなわち任意の実数 λ に対して $f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^d f(x_1,\ldots,x_n)$ が成立する多項式）が $x = (x_1,\ldots,x_n)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \; (=0) \quad \text{であれば} \quad x_1 = \cdots = x_n = 0$$

を満たすならば、X は $X \cap H_\infty$ の各点の近傍で $\mathbb{RP}^n$ の $n-1$ 次元部分多様体であることを示せ。

2) x_n に関する 2 次以下の多項式 $g(x_n)$ に対して $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + g(x_n)$ とおく。$n > 2$ のとき次の性質 $(\star)$ を持つような $g(x_n)$ の形を決定せよ。

$(\star)$ $X \cap (\mathbb{RP}^n \setminus H_\infty)$ は $\mathbb{RP}^n$ の空でない $n-1$ 次元 C^∞ 部分多様体だが、X 全体はそうではない。

$\boxed{5}$ $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対し有界線型作用素 $T_F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ を

$$T_F f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y) f(y)\, dy \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

で定める。$\{F_n\}_{n\geq 1}$ は $L^2(\mathbb{R}^2)$ の有界列であって、任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し $\{T_{F_n} f\}_{n\geq 1}$ が $L^2(\mathbb{R})$ で弱収束すると仮定する。

1) ある $F_\infty \in L^2(\mathbb{R}^2)$ が存在して、任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_{F_n} f = T_{F_\infty} f$$

が成り立つことを示せ。

2) さらに $\{T_{F_n}\}_{n\geq 1}$ が T_{F_∞} に作用素ノルムの意味で収束すると仮定する。このとき

$$V = \{T_{F_n} f \mid f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ \|f\|_{L^2} \leq 1,\ \ n \geq 1\}$$

の閉包 $\overline{V}$ はコンパクトであることを示せ。

$\boxed{6}$ $\Phi(x) = \log(1 + e^{-x})$ とし、$K(x), u_0(x)$ は次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする。

$$K(x) \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1,$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) > \Phi(0).$$

$n \geq 1$ に対して $u_n(x)$ を

$$u_n(x) = u_0(x) - \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u_{n-1}(y))\,dy$$

と定める。

1) $u_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数として well-defined であって、適当な定数 c をとればすべての $x \in \mathbb{R}, n \geq 0$ に対して

$$u_n(x) \geq u_{n+1}(x) \geq c$$

が成り立つことを示せ。

2) $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ は積分方程式

$$u(x) = u_0(x) - \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u(y))\,dy$$

の解 $u(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ。

$\boxed{7}$ 正の定数 a に対し微分作用素 L を

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - a^2$$

と定め、実数値函数 u に対する次の固有値問題を考える。

$$L^2 u = \mu u \qquad (0 < x < 1),$$
$$u(0) = 0, \qquad \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = 0,$$

$$u(1) = 0, \qquad \frac{d^2u}{dx^2}(1) = 0.$$

1) 内積 $\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx$ に関して $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ を満足する任意の実数値函数 $f, g \in C^2[0,1]$ に対し

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$$

が成り立つことを示せ。

2) 固有値 μ は非負であって、固有関数 u は

$$(L + \sqrt{\mu})u = 0$$

を満たすことを示せ。

3) 最小固有値 $\mu_0(a)$ に対して $\lambda_0(a) = \mu_0(a)/a^2$ と置く。$a > 0$ を動かしたときの $\lambda_0(a)$ の最小値を求めよ。

外国語

問題は 2 題である.

1．英文和訳

次の文章は，McGraw-Hill Encyclopedia of Science & Technology の中の 1 項目の初めの部分である.

（イ）　第 1 段落の内容を要約せよ.

（ロ）　第 2 段落を和訳せよ.

Euclidean geometry

The word geometry is derived from two Greek words meaning "earth measurement." It seems probable that many of the early discoveries in geometry were motivated by the need to make measurements of distances and areas on the Earth. However, euclidean geometry has a broader meaning. It is the chief subject matter of the monumental 13-volume work called *The Elements*, written about 300 B.C. by the Greek mathematician Euclid, who taught and founded a school of geometry at Alexandria. One of the milestones in the history of scientific thought, these books of Euclid still occupy an important position in mathematical instruction today.

Geometry, as developed in Euclid, was a systematic body of mathematical knowledge, built by deductive reasoning upon a foundation of three main pillars: (1) definitions of such things as points, lines, planes, angles, circles, and trian-