京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ。

$\boxed{1}$ A は n 次複素正方行列で，ある整数 $k \geq 2$ について，$A^k = A$ をみたすものとする．このとき，$|\mathrm{tr}\, A| \leq \mathrm{rank}\, A$を示せ．

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が条件「任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，更にその部分列 $\{a_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty}$ がとれて

$$\lim_{\ell \to \infty} a_{n_{k_\ell}} = \alpha$$

となる」をみたすならば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身が α に収束することを示せ．

$\boxed{3}$ $V = \mathbf{C}^n$ を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする．A を $\mathbf{C}$ 係数の n 次正方行列とする．V の部分ベクトル空間 W は，任意の $w \in W$ に対して $Aw \in W$ が成り立つとき A-不変であるという．次の (1), (2) を示せ．

(1) A が対角化可能であるための必要十分条件は，V の A-不変な部分ベクトル空間はつねにA-不変な補空間を持つことである．

(2) A が対角化可能で，A の各固有値の A の固有多項式における重複度は 1 であるための必要十分条件は，V の A-不変な部分ベクトル空間はつねに唯一つのA-不変な補空間を持つことである．

$\boxed{4}$ 区間 $(0, \infty)$ で定義された実数値連続函数 $f(x)$ と実数列 $\{A_m\}_{m \geq 1}$ が与えられて，任意の正整数 $n \geq 1$ に対して

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \left| f(x) - \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{x^m} \right| = 0$$

が成り立つとき，

$$(*) \qquad f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{x^m}$$

と記す．$(*)$ が $A_1 = 0$ で成り立つとき，任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $\int_x^{\infty} f(t)dt$ が収束し，

$$\int_x^{\infty} f(t)dt \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{m+1}}{mx^m}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ G は位数 n の有限群で，次の性質 $(*)$ をみたす:

$(*)$ n の任意の約数 d に対し，G は位数 d の部分群を唯一つ持つ．

G はどの様な群か．

$\boxed{6}$ $f: S^2 \to \mathbf{R}^2$ は C^∞-写像であるとする．このとき $\operatorname{rank} df_x < 2$ となる $x \in S^2$ が存在することを示せ．ここで，S^2 は 2 次元球面である．

$\boxed{7}$ 函数 $f(z) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{izt} dt$ は $\operatorname{Im} z > -1$ で正則であることを示せ．

数学 II

⊗ 問題は7題あり，次の3つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の2題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の2題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の3題である．

⊗ この7問題中，<u>3問題</u> を <u>2つ以上の分野群</u> から選択して解答せよ．

$\boxed{1}$ $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ に対して，$\mathbf{C}$ の部分環 $R = \mathbf{Z}[\omega]$ を考える．R の元 $a \in R$ が生成する R のイデアルを (a) と記し，商環 $R/(a)$ の可逆元の全体を $(R/(a))^\times$ と記す．

(1) 乗法群 $(R/(3))^\times$ の位数を求めよ．

(2) 乗法群 $(R/(9))^\times$ を巡回群の直和の形に表せ．

$\boxed{2}$ 標数 0 の体 k 上の n 変数多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ の d 次の同次多項式全体 (0 も含む) を $k[X_1, \ldots, X_n]_{(d)}$ で表すことにする．n に関する次の命題 P_n を考える．

> P_n : 任意の $F \in k[X_1, \ldots, X_n]_{(2)}$, $G \in k[X_1, \ldots, X_n]_{(3)}$ に対して，k の有限次可解拡大体 k' と $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k'^n$ が存在して，$a \neq (0, \ldots, 0)$, $F(a) = G(a) = 0$ となる．

(1) P_n が成立すれば，P_{n+1} が成立することを示せ．

(2) $n \geq 4$ のとき，P_n が成立することを示せ．

$\boxed{3}$ R^2 の線型変換 $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n は整数) は 2 次元トーラス $T^2 = \mathrm{R}/\mathrm{Z}^2$ の自己同型写像 φ を誘導する. $[0,1] \times T^2$ に対して $0 \times T^2$ の点 $(0,x)$ と $1 \times T^2$ の点 $(1, \varphi(x))$ とを同一視することによって多様体 M_n を定義する.

$\mathbb{R}^2$

(1) $\varphi_* : H_*(T^2, \mathrm{Z}) \to H_*(T^2, \mathrm{Z})$ を求めよ.

(2) $H_*(M_n, \mathrm{Z})$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 境界のない n 次元コンパクト C^∞ 級多様体 M 上の Morse 函数 $f : M \to \mathrm{R}$ (すなわちf の任意の臨界点 p のまわりの局所座標 $(u_1, \ldots, u_n)$ に対して

$$Hf_p = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(p) \right)$$

が正則行列である) を考える. Hf_p の負の固有値の数を $\nu_p(f)$ と記す. 境界のないコンパクト C^∞ 級多様体には常に Morse 函数が存在し, 臨界点は有限個であり

$$\alpha(f) = \sum_{p:\text{臨界点}} (-1)^{\nu_p(f)}$$

は Morse 函数 f によらないM の位相不変量であることが知られている. 以下の問に答えよ.

1) $2m$ 次元球面 S^{2m} に対して $\alpha(S^{2m})$ を求めよ.

2) M が奇数次元のとき $\alpha(M) = 0$ であることを示せ.

3) M に有限群 G が C^∞ 級かつ自由に作用すれば(すなわち $g \neq e$ ならば $gx \neq x$ が成り立つ), $\alpha(M)$ は G の位数 $|G|$ で割り切れることを示せ.

4) $M = S^{2m}$, $M = S^{2m} \times S^{2m}$ の場合に C^∞ かつ自由に作用する有限群をすべて求めよ.

$\boxed{5}$ 全複素平面 C 上の正則函数 $f(z)$ に対して

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x - z} dx \quad (z \in \mathrm{C} \backslash [0,1])$$

とおく.

1) $F(z)$ は $\mathrm{C} \setminus [0,1]$ 上正則であり, また $0 < t < 1$ を満たす任意の t に対し $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(t \pm i\varepsilon)$ が存在することを示せ.

2)　$f(z)$ が恒等的に 0 でない限り, $F(z)$ を原点の近傍における有理型関数に解析接続することはできないことを示せ.

$\boxed{6}$ Banach 空間 X 上の有界線型作用素の列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\|P_n\| = 1$, $P_n^2 = P_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をみたし, 各 $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n x - x\| = 0$$

が成り立っているとする. また A は X 上の有界線型作用素で $\|I - A\| < 1$ (I は恒等作用素) をみたすものとする.

1)　作用素 A, $I - P_n(I - A)P_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は有界な逆作用素を持つことを示せ.

2)　各 $n = 1, 2, \cdots$ と $y \in X$ に対して, 作用素 P_n の値域に一意的に x_n が存在して $P_n A x_n = P_n y$ となることを, 実際に x_n を求めることにより示せ.

3)　2) の x_n について, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - A^{-1}y\| = 0$ を示せ.

$\boxed{7}$ 閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数の全体を $C([0, 1])$ と記し,

$$H = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ は絶対連続で } f' \text{ は } [0,1] \text{ で2乗可積分}\}$$

とおく. $f, g \in H$ に対しその内積を

$$\langle f, g \rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

で定め, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ とする.

1)　$f_n \in H$ $(n = 1, 2, \cdots)$ がこのノルムに関し Cauchy 列 $\|f_n - f_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ となるとき, $f \in H$ が存在して f_n は f に $[0, 1]$ 上で一様収束することを証明せよ.

2)　$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対し $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ とおくと, $e_n \in H$ であるが, $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に直交する空間 M, すなわち

$$M = \{f \in H \mid \langle f, e_n \rangle = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

を決定せよ.