京　都　大　学

数　学　I

◎ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ。

・ただし，数理解析専攻志願者は $\boxed{3}$ または $\boxed{5}$ のかわりに $\boxed{A}$ を解答してもよい。数学専攻としては，$\boxed{A}$ は評価しないので，注意すること。

$\boxed{1}$ V は複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間であるとして，V の3個のテンソル積 $V \otimes V \otimes V$ を W とおく。W から W への線型写像 T_1, T_2 を

$$T_1(x \otimes y \otimes z) = y \otimes x \otimes z$$
$$T_2(x \otimes y \otimes z) = x \otimes z \otimes y$$

で定義する。零でない線型写像 $S : W \to W$ が存在して

$$T_i S = a_i S \quad (i = 1, 2)$$

となるような $(a_1, a_2) \in \mathbf{C}^2$ をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 開区間 $(0, +\infty)$ 上で連続的微分可能な正値函数 $f(x)$ に対し

$$\int_0^1 x|f'(x)|dx < +\infty$$

ならば

$$\int_0^1 f(x)dx < +\infty$$

であることを示せ。

$\boxed{3}$ 可換体 K の5次拡大体 $K(\theta)$ で，$K(\theta)$ を含む K の最小の Galois 拡大体が K 上40次になるものは存在しないことを示せ。

$\boxed{4}$ $f(z)$, $g(z)$ は複素平面の領域 D で正則な函数とする。$f(z)$ は恒等的に0ではなく，$f(z)\overline{g(z)}$ が D で正則であるとすると，$g(z)$ は定数函数であることを示せ。ただし $\overline{g(z)}$ は $g(z)$ の複素共役である。

$\boxed{5}$　回転群 $SO(3)$ からそれ自身への写像 $f: SO(3) \to SO(3)$ を $f(X) = X^2$ で定義する。このとき, $SO(3)$ の単位元 E は $f(X)$ の正則値（すなわち $f^{-1}(E)$ の各点のまわりで f は局所微分同相）でないことを示せ。

$\boxed{A}$　4 次元空間において, 原点を始点とし, 終点の座標　(a_1, a_2, a_3, a_4) がすべて整数であるか, またはすべて ½ の奇数倍であるようなベクトルで, 長さが 3 であるものは, 総計何本あるか。

数　学　Ⅱ（専　門　科　目）

◎　問題は　1 2　ある。
その内，分野群［ a ］の問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの 7 題，［ b ］の問題は $\boxed{8}$ の 1 題，［ c ］,［ d ］の問題はそれぞれ 2 題であって，

［ c ］　$\boxed{9}$，$\boxed{10}$
［ d ］　$\boxed{11}$，$\boxed{12}$

◎　この 1 2 問題中，　3 問 題　を選択せよ。
ただし，数学専攻としては，分野群［ c ］,［ d ］の問題は評価しないので注意すること。

$\boxed{1}$　単位元をもつ可換環 R に関する次の命題 1, 2, 3 のおのおのについて, 次のことに答えよ。

(1) 命題が正しいかどうか, 理由をつけて答えよ。

(2) 命題が正しくない場合には, R に適当な条件をつけ加えて　正しい命題にして, それを証明せよ。

命題 1.　$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in R$, $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ に対し, $\{\ c \in R \mid f(c) = 0\ \}$ の元数は n 以内である。

命題 2.　$a\ (\in R\ )$ が R を含むある可換環（単位元は R と共有）の中に逆元 a^{-1} をもっていて, さらに $R[\ a^{-1}\ ]$ が R 加群として有限生成であれば $a^{-1} \in R$。

命題 3.　R 上の 1 変数の多項式環 $R[\ x\ ]$ において逆元をもつ元は R の元に限る。

$\boxed{2}$　以下で Q は有理数体を表す。

(1) $\alpha = \sqrt{-3-\sqrt{2}}, \beta = \sqrt{-3+\sqrt{2}}$ とおく。

(i) $\beta \notin \mathrm{Q}(\alpha)$ を示せ。

(ii) $\mathrm{Q}(\alpha)$ を含む Q 上最小の Galois 拡大体を L とする。$\mathrm{Gal}(L/\mathrm{Q})$ の元 τ で $\alpha^\tau = -\beta, \beta^\tau = \alpha$ となるものが存在することを示せ。

(iii) τ で不変な元のなす L の部分体を求めよ。

(2) a, b は平方数でない自然数とする。 $\mathrm{Q}(\sqrt{a+\sqrt{b}})$ が Q 上 Galois 拡大になる場合はどういうときか。

$\boxed{3}$　位相空間 X の 3 つの直積 $X^3 = X\times X\times X$ に位数 3 の巡回群 G が次のように作用している：

G の生成元 g と X^3 の点 (x,y,z)について, $g(x,y,z) = (y,z,x)$.

$X = I$ （閉区間）, $X = T$ （円周）の場合を考える。I^3 は立方体, T^3 は 3 次元トーラスである。

(1) I^3/G と I^3 は同相であることを示せ。

(2) T の 1 点 x_0 について, $L = (T\times T\times x_0) \cup (T\times x_0\times T) \cup (x_0\times T\times T) \subset T^3$ とするとき, L/G はどのような胞複体 (cell-complex) として表されるか。

(3) T^3/G の基本群を求めよ。

(4) T^3/G のホモロジー群を求めよ。

$\boxed{4}$　各面がすべて三角形である 2 次元多面体 K において, 各頂点に集まる辺の数がすべて k 個であり, K は 2 次元トーラスと同相である。このとき k の値を求めよ。またこのような K の例を一つ示せ。

$\boxed{5}$　単位円板 $D = \{ z \in \mathrm{C} \mid |z|<1 \}$ で正則な函数の族 $F = \{ f(z) \mid f(z)$ は D で正則, $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$, かつ $I(f) = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy < \infty \}$ を考える。このとき

$$I(f_0) = \inf_{f \in F} I(f)$$

となる $f_0 \in F$ を求めよ。

6　H は可分な複素 Hilbert 空間で, $\{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ はその完全正規直交系とする（従って, 任意の $x \in H$ は $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ となる $\{ x_n \}$ を用いて $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ と一意的に表される）。次のように定義される線形作用素 T を考える:

$x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ に対して, $y_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} x_j$ とおいて, $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$ と定める。

以下のことを示せ。

(i) T は H 全体で定義された有界作用素である。

(ii) T は compact (completely continuous) である。ただし, T が compact (completely continuous) であるとは, H の任意の有界列の T による像から, 収束する部分列がとれることである。

(iii) T は $\lambda = \dfrac{1}{4}$ を固有値として持つ（すなわち, $Tx = \lambda x$ となる $x \in H$, $x \neq 0$, が存在する）。

7　$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ 上で定義された非負の実数値可測関数で, 任意の $s \in (0, 1)$ に対し,

$$\int_0^1 s^{f(x)} dx = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$$

となるものとする。ただし右辺は $|s| < 1$ で収束するベキ級数である。このとき次を示せ。ここに, 可測集合 A に対して, $m(A)$ はそのルベーグ測度である。

(i) $a_0 = m(\{ x \in [0, 1] \mid f(x) = 0 \})$.

(ii) ほとんどすべての x に対し $f(x)$ は非負整数であり

$$a_k = m(\{ x \in [0, 1] \mid f(x) = k \}), \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

8　次の2問のうちいずれか1問を選択せよ。（2問解答した場合は不利な扱いを受ける。）

1. 熱伝導方程式の初期−境界値問題を考える。

(a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad t>0,\ 0<x<1,$$

(b) $$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \quad t>0,$$

(c) $$u(0, x) = \phi(x), \quad 0<x<1.$$

$\phi(x)$ が $0\leq x\leq 1$ で二乗可積分で $f(t,x)$ が $t\geq 0$, $0\leq x\leq 1$ で有界で滑らかな函数ならば $t>0$, $0\leq x\leq 1$ で滑らかな解 $u(t,x)$ が存在する。これを認めて次が成り立つことを示せ。

(i) $E(t) = ||u(t,\cdot)||^2$, $F(t) = ||f(t,\cdot)||^2$,

(ここで $||h||^2 = \int_0^1 h^2(x)dx$) としたとき

$$\frac{dE(t)}{dt} + E(t) \leq F(t).$$

(ii) f は t について周期 2π の周期函数とする。ϕ を与えたときの (a) (b) (c) の解を $u(t, x)$ とし, 写像 T を $T\phi = u(2\pi, \cdot)$ で定める。このとき写像 T は $L^2(0,1)$ での縮小写像である。すなわち定数 α $(0 < \alpha < 1)$ が存在して

$$||T\phi - T\psi|| \leq \alpha||\phi - \psi||$$

が任意の二乗可積分函数 ϕ, ψ に対して成り立つ。

(iii) (ii)の条件のもとで (a), (b) の t についての 2π 周期解 $u(t, x)$ が唯一つ存在する。

2. α は複素数で, δ は正の実数とする。

(i) その虚部 Im t が正である複素数 t に対して, 次の積分 $I(t)$ は有限確定値を取ることを示せ。

$$I(t) = \int_0^\delta r^{-1}\{(r+t)^\alpha - t^\alpha\}dr$$

(ii) 上の積分 $I(t)$ に対し $(t\frac{d}{dt}-\alpha)^2 I(t)$ は $t = 0$ の近傍において正則な函数を定めることを示せ。

$\boxed{9}$ 有限次の正方行列に対して, 次の記号を用いる。

$$[A,\ B] \equiv AB - BA,$$

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

行列 B に作用する線型作用素 $ad\ A$ を次式で定義する。

$$(ad\ A)(B) \equiv [A,\ B]\ .$$

そのとき次の公式が成立する。（これは既知として使用してよい。）

$$e^A B e^{-A} = e^{ad\ A}(B).$$

さて，有限次行列 $X_i,\ Y_i$ $(i=1,\ 2)$ が与えられていて，次の関係式を満たすものとする。

(i) $[\,[X_i,\ Y_i],\ X_i] = 2X_i,$

$[\,[X_i,\ Y_i],\ Y_i] = -2Y_i.$

(ii) $i \neq j$ のとき

$[X_i,\ Y_j] = 0,$

$[X_i,\ [X_i, X_j]\,] = 0,$

$[Y_i,\ [Y_i,\ Y_j]\,] = 0,$

$[\,[X_i,\ Y_i],\ X_j] = -X_j,$

$[\,[X_i,\ Y_i],\ Y_j] = Y_j.$

このとき次の公式を証明せよ。

(1) $e^{X_1} e^{Y_1} e^{-X_1} = e^{Y_1 + [X_1,\ Y_1] - X_1},$

$e^{-Y_1} e^{-X_2 - [X_1,\ X_2]} e^{Y_1} = e^{-[X_1,\ X_2]}.$

(2) $\gamma_i \equiv e^{-X_i} e^{Y_i} e^{-X_i}$ $(i=1,\ 2)$ $[\ X_i$ の符号に注意 $]$

とするとき

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1 = \gamma_2\gamma_1\gamma_2\ .$$

10 円周上の一様測度についての複素 L_2 関数に対し内積

$$(f,\ g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)}\, g(\theta)\, d\theta$$

を定義する。殆ど到る所一致する関数を同一視すると，L_2 関数全体はこの内積に関して複素ヒルベルト空間（以下 H と記す）になり，関数列

$$\phi_n(\theta) = e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

は H の完全正規直交系をなす。これを既知として次の問いに答えよ。

(1) 実数 t （時間）をパラメターとする H 上の作用素 $U(t)$ を

$$U(t)\Big(\sum_n c_n\phi_n\Big) = \sum_n c_n e^{-itn^2}\phi_n \quad \Big(\sum_n |c_n|^2 < \infty \Big)$$

により定義し，また $\phi \in H$ に対して極限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{it}(U(t)\phi - \phi) \equiv H\phi$$

が H の強位相で存在するとき，ϕ は $U(t)$ の生成作用素 H の定義域に属するといい，この極限により $H\phi$ を定義する。円周上の C^∞ 関数（実数 θ の C^∞ 関数で周期 2π の周期関数）は H の定義域に属し，そのような ϕ に対して H はラプラシアン

$$H = (\partial/\partial\theta)^2$$

であることを示せ。

(2) 作用素 $\underline{\theta}$ を

$$(\underline{\theta}\,\phi)(\theta') = \theta'\phi(\theta') \quad (\phi \in H,\ \theta' \in [0, 2\pi))$$

と定義し，その形式的時間微分を形式的な交換関係の計算

$$[(\partial/\partial\theta)^2, \theta] = 2\partial/\partial\theta$$

により

$$\underline{\dot{\theta}} \equiv -2i(\partial/\partial\theta) \quad (\approx -i[H, \underline{\theta}])$$

と定義する。C^∞ 関数 ϕ による物理量 $\underline{\theta}$ の時刻 t における期待値は

$$f(t) = (U(t)\phi,\ \underline{\theta}\,U(t)\phi)$$

で与えられ，その時間微分と $\underline{\dot{\theta}}$ の期待値の差

$$A(\phi) \equiv f'(0) - (\phi,\ \underline{\dot{\theta}}\,\phi)$$

は anomaly と呼ばれる。$A(\phi)$ を計算せよ。

11 以下数を表す文字はすべて整数とする。正数 p は 6 で割ると 1 余る素数

とする。

(i) $r \not\equiv 1 \pmod{p}$ かつ $r^3 \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす r が存在することを証明せよ。

(ii) (i) の r に対して

$$m_0 = p,\ m_1 = r,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

とおき，次のような互除法の計算を行う。

$$m_{i-1} = m_i q_i + m_{i+1}\ \ (\, 0 \leq m_{i+1} < m_i\,),\ \ u_{i+1} = u_{i-1} - u_i q_i.$$

このとき $m_i^2 + m_i u_i + u_i^2$ はつねに p で割りきれることを証明せよ。

(iii) 上記の操作を続けると，いつかは $m_i^2 + m_i u_i + u_i^2$ 自身が p と等しくなる（この事実は証明しなくてもよい）。この演算を利用して，素数 127 を正の整数 a, b により $a^2 + ab + b^2$ の形に表現せよ。

$\boxed{12}$ a が正の整数を動くとき

$$\psi(a) = \{\, n \mid 1 \leq n < a,\ n\ \text{は}\ a\ \text{の約数}\,\}$$

と ψ を定義する。

$$P:\ \text{正の整数全体} \ \rightarrow\ \{0, 1\}\,;$$

$$P(a) = \begin{cases} 1 & \text{if}\ \ a = \displaystyle\sum_{w \in \psi(a)} w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関数 P を計算するプログラム*)を与え，そのプログラムが実際に P を計算することを示せ（formal proof を要求するわけではない）。

また

```
input(K);
s := 2;  n := 1;
while  n < K  do
   (if  P(s) = 1  then  n := n + 1;
    s := s + 1)
```

なるプログラムが，任意の整数 K に対して停止するためには，いかなる数学の命題が成り立つことが必要か。

———

*) Algol 式または PASCAL 式の言語を用いよ。ただし，特定のプログラミング言語の細かい文法にこだわるには及ばない。

外 国 語

◎ 問題は，E，D，F，R の 4題 ある。

この4問題中，2 問 題 を選択せよ。

◎ 辞書を用いてもよい。

E いずれか一方の段落を和訳せよ。

One who has championed the aesthetic aspects of mathematics forcefully is the English number theorist Godfrey Hardy, whose proudest boast was that he had never done anything useful in the sense of practical applications. Hardy described mathematicians as markers of patterns of ideas; he asserted that for them, as for other artists, "beauty and seriousness [are] the criteria by which [their] patterns should be judged." Beauty, he says, "is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics." And he summed up his life's work in this way:

"The case for my life, then, or for that of any one else who has been a mathematicians in the same sense in which I have been one, is this: that I have added something to knowledge, and helped others to add more; and that these somethings have a value which differs in degree only, and not in kind, from that of the creations of the great mathematicians, or of any of the other artists, great or small, who have left some kind of memorial behind them."

D いずれか一方の段落を和訳せよ。

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein grosser Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor. So ist es auch mit der linearen Algebra. Mit einem Alter von vielleicht hundert Jahren ist sie noch jung, und ihr Gegenstand ist eine besonders einfache Struktur, die Bestandteil vieler anderer und sehr viel komplexerer Strukturen, in anderen Gebieten ist.

Das Studium dieser Struktur steht daher heute mit Recht am Anfang des Studiums der Mathematik überhaupt. Leider entsteht dabei bisweilen ein Eindruck