平成 26 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題
専門科目

◎　問題は 12 題ある．数学系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{10}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり, 両系をともに志望している者の解答問題数は, 選択によって 2〜4 題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 3 時間 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は, 選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ $\mathbb{C}[X,Y]$ を複素数係数の 2 変数多項式環, $A=\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^3-1)$ とし, $X,Y\in\mathbb{C}[X,Y]$ の A での類をそれぞれ x,y とおく.

(i) A が整域であり, A の商体 L が $\mathbb{C}(y)$ の 2 次拡大であることを証明せよ.

(ii) A が $\mathbb{C}[y]$ の L における整閉包であることを証明せよ.

(iii) y が A の既約元であることを証明せよ.

(iv) A が UFD(一意分解整域) であるかどうか理由をつけて決定せよ.

$\boxed{2}$ $K\subset\mathbb{C}$ を部分体, p を素数とする. $\mathbb{C}$ に含まれる任意の有限次拡大 L/K に対し, $L=K$ でなければ, $[L:K]$ は p で割り切れると仮定する. このとき, $\mathbb{C}$ に含まれる任意の有限次拡大 L/K に対し, $[L:K]$ は p のべき (1 を含む) であることを証明せよ.

$\boxed{3}$ ζ を 1 の原始 7 乗根 $e^{2\pi\sqrt{-1}/7}$ とし, $\mathbb{C}$ の部分集合

$$A=\{a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+a_4\zeta^4+a_5\zeta^5+a_6\zeta^6 \mid a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in\{0,1\}\}$$

を考える. このとき, $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\zeta)$ となる $\alpha\in A$ の個数を求めよ.

$\boxed{4}$ M を境界のないコンパクトな C^∞ 級多様体とし, N を M の境界のない余次元 1 の C^∞ 級閉部分多様体とする. ここで, 部分多様体の包含写像は C^∞ 級埋め込みであるとする.

(i) N の任意の点 p に対し, M における p の近傍 U と, U 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ が存在し, 次をみたすことを示せ.

任意の $q\in N\cap U$ に対し, $\theta_q\neq 0$ であり, $\mathrm{Ker}\,\theta_q=T_qN$ となる.

ただし, T_qN は q における N の接空間を意味する.

(ii) M,N がともに向き付け可能であるとき, M 上の C^∞ 級 1 次微分形式 θ が存在し, 次をみたすことを示せ.

任意の $q\in N$ に対し, $\theta_q\neq 0$ であり, $\mathrm{Ker}\,\theta_q=T_qN$ となる.

$\boxed{5}$ 円周 S^1 の点 p をひとつとる. $S^1\times S^1\times S^1\times S^1$ の部分空間

$$X=\{(x,y,z,w)\in S^1\times S^1\times S^1\times S^1 \mid x=p,\ \text{または}\ y=p,\ \text{または}\ z=w=p\}$$

の整数係数ホモロジーを求めよ.

$\boxed{6}$ f を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数とする．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx < \infty$$

が成り立っているとする．このとき以下を示せ.

(i) $g(x) = xf(x)^2$ とおくと, g' は $\mathbb{R}$ 上可積分であり, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ となる.

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx \le 2\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx\right\}^{1/2}$.

$\boxed{7}$ H を実 Hilbert 空間とし, T を H 上のコンパクト作用素とする．任意の $x \in H$ に対して, H の点列 $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき 0 に弱収束しているとする．以下の問に答えよ.

(i) 任意の $x \in H$ に対して, H の点列 $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に強収束していることを示せ．(補足説明: (i) で強収束とは, H のノルムに関する収束を意味する.)

(ii) 作用素列 $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に作用素ノルムで収束していることを示せ.

$\boxed{8}$ C^2 級関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はすべての $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ で次の方程式をみたす.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

このとき, $\mathbb{R}$ 上の 3 つの実数値関数 E, v_+, v_- を次で定める.

$$E(t) = \int_{-t}^{t}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 + |u(t,x)|^2\right\} dx,$$
$$v_\pm(t) = u(t,\pm t) \quad (\text{複号同順}).$$

以下の問に答えよ.

(i) $\frac{dE}{dt}(t)$ を関数 $v_\pm$ とその導関数を用いて表し, $E(t)$ が $t \in \mathbb{R}$ について単調増加であることを示せ.

(ii) $\sup_{t\ge 0} E(t) < \infty$ なら, $\lim_{t\to\infty} v_\pm(t) = 0$ となることを示せ.

$\boxed{9}$ 半径 $a > 0$ の球内の非圧縮非粘性流体の軸対称な運動を考える．球の中心を原点とする適切な球座標 (r, θ, ϕ) を用いると，速度成分 $(v_r, v_\theta, 0)$ は次の連続の式をみたす．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0.$$

(i) 流れ関数 ψ に対して $v_r = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ とおくと，上の連続の式を満たしていることを示せ．さらに，ϕ 方向の渦度 $\omega = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}$ を ψ で表せ．

(ii) 渦度が $\omega = -r\sin\theta$ と与えられるときの v_r, v_θ を，(i) での流れ関数 ψ を用いて次の手順で求める．

(a) $\psi = f(r)\sin^2\theta$ の形を仮定し，$f(r)$ のみたす微分方程式を導け．

(b) $f(r)$ の一般解を求めよ．(ヒント: $f(r) = r^n$ を代入してみよ.)

(c) $r = a$ で $\psi = 0$, $r = 0$ で有界，という境界条件を用いて ψ を定め，v_r, v_θ を求めよ．

$\boxed{10}$ A をアルファベットとし，$A^* = \{a_1 \cdots a_n \mid a_1, \ldots, a_n \in A,\ n$ は非負整数$\}$ とする．任意の $M, N \subseteq A^*$ について，$M \cdot N$ を

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\}$$

と定義し，また M^* を以下をみたす A^* の最小の部分集合と定義する．

$$\{\varepsilon\} \cup (M \cdot M^*) \subseteq M^*.$$

集合 $K \subseteq A^*$ が $\varepsilon \in K$ かつ $K \cdot K \subseteq K$ をみたすとき，

$$X = (K - \{\varepsilon\}) - (K - \{\varepsilon\}) \cdot (K - \{\varepsilon\})$$

は $X^* = K$ をみたす A^* の最小の部分集合であることを示せ．

$\boxed{11}$ 有限集合 U, V に対し，頂点集合 $U \cup V$ $(U \cap V = \emptyset)$，辺集合 $E \subseteq U \times V$ となる 2 部グラフ $G = (U, V; E)$ を考える．ただし，$|U| = |V|$ とする．辺部分集合 $M \subseteq E$ に対して，その端点集合 ∂M が $|\partial M| = 2|M| = 2|U|$ をみたすとき，M を G の完全マッチングという．点部分集合 $W \subseteq U$ に対して

$$\Gamma(W) = \{v \in V \mid \text{ある } w \in W \text{ に対して } (w, v) \in E\}$$

と定義する．このとき，任意の $W \subseteq U$ に対して $|W| \le |\Gamma(W)|$ をみたすことが，G に完全マッチングが存在するための必要十分条件であることを示せ．

$\boxed{12}$ 時間に依存しない (自己共役な) ハミルトニアンが H で与えられる量子系を考えよう. 簡単のため, 以下では $\hbar = 1$ とおき, i は虚数単位を表す. この系の時間発展演算子を $U_t = \exp(-itH)$ $(t \in \mathbb{R})$ と記す. 規格化された時間に依存しない状態ベクトル $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ が一つ選ばれているものとし, この状態への射影演算子を $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ で表す. また, 一般に演算子 A の期待値, 分散をそれぞれ以下の式で定義する.

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A\psi\rangle, \qquad \Delta(A)^2_\psi = \langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle^2_\psi .$$

(i) $t \to 0$ で,

$$\langle U_t\rangle_\psi = \exp\left(-it\langle H\rangle_\psi - \frac{t^2}{2}\Delta(H)^2_\psi\right)\left[1 + O(t^3)\right]$$

となることを示せ.

(ii) 期待値

$$\langle P_\psi U_{t/n} P_\psi U_{t/n} \cdots P_\psi U_{t/n} P_\psi\rangle_\psi \tag{1}$$

は $n \to \infty$ のとき

$$\exp\left(-it\langle H\rangle_\psi\right)$$

に近づくことを示せ. ただし, (1) で $U_{t/n}$ は n 回現れるものとする.