平成26年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 II

◎　問題は7題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$の5題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$の3題を解答し，さらに，$\boxed{4}$〜$\boxed{7}$のうちの2題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は5題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって5〜7題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 3時間 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，自然数の全体，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 実数値関数 $f(x)$ は $[0,\infty)$ で連続で, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\int_0^\infty f(x)e^{-x}x^n\,dx = 1$$

であることを証明せよ.

$\boxed{2}$ n, m を正の整数とする. x を変数とする n 次以下の $\mathbb{C}$ 係数多項式の全体を V_n とし, 和, 差, スカラー倍により V_n を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす. m 個の複素数 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ に対し, 線形写像 $F : V_n \to \mathbb{C}^m$ を

$$F(f) = (f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_m))$$

で定める. このとき,

(i) F が単射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1,\dots,\alpha_m$ のみを用いて述べよ.

(ii) F が全射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1,\dots,\alpha_m$ のみを用いて述べよ.

$\boxed{3}$ L_R $(R>0)$ は複素平面において $-R+2i$ を始点, $R+2i$ を終点とする線分を表す. このとき

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 群 $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の指数 3 の部分群の個数を求めよ.

$\boxed{5}$ $f : S^2 \to S^1$ を C^∞ 級写像とする. ただし, S^n は n 次元球面

$$\left\{ (x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

を表す. このとき, S^2 上の少なくとも 2 点において f の微分は零写像になることを示せ.

$\boxed{6}$ a は 0 でない実数, $p(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続な周期関数で周期 T ($T > 0$) をもつとする. このとき常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + p(t)$$

の解 $x(t)$ で, 周期 T をもつ周期関数となるものが唯一つ存在することを証明せよ.

$\boxed{7}$ n を正の整数とし, n 次実正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ において, 不等式

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$$

がすべての $i = 1, \ldots, n$ に対して成立しているとする. ただし, 右辺の和は 1 から n までの整数 j で i 以外のものにわたる. このとき, A は正則であることを示せ.