平成 25 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2013 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かぬこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

[記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体を表す.

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるような3次実正方行列A, Bが存在するのは，xがどのような実数のときか.

$\boxed{\mathbf{2}}$ f, gを，半無限区間$[0, \infty)$上の実数値連続函数で，次の(a),(b)を満たすとする.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty |g(x)|dx < \infty.$

このとき，

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

とおくと，$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$が成り立つことを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ pを素数とし，$\mathbb{F}_p$を位数pの有限体とする．$\mathbb{F}_p$を成分に持つ2次正方行列Xで，X^pが単位行列となるものの数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $n \geq 1$を整数とし，$M \subset \mathbb{R}^{n+2}$を滑らかな$n$次元部分多様体で，$\mathbb{R}^{n+2}$の中で閉集合とする．このとき，任意の$x_0 \in M$に対して，$\mathbb{R}^{n+2}$の中のある直線$L$で,

$$L \cap M = \{x_0\}$$

を満たすものが存在することを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(z)$を$\mathbb{C}\backslash\{0\}$上で正則な函数とする.

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad (z \neq 0)$$

が成り立つとき，$f(z)$は定数であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Determine all real numbers x for which there exist 3×3 real matrices A, B such that

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Let f, g be real-valued functions on the interval $[0, \infty)$ satisfying the following conditions (a),(b):

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$,

(b) $\int_0^\infty |g(x)| dx < \infty$.

Prove that if the function $h(x)$ is defined by

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy,$$

then $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Let p be a prime number and $\mathbb{F}_p$ the finite field with order p. Find the number of 2×2 matrices X with entries in $\mathbb{F}_p$ such that X^p is the unit matrix.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Let $n \geq 1$ be an integer and $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a smooth n-dimensional submanifold which is a closed subset of $\mathbb{R}^{n+2}$. Prove that for any $x_0 \in M$, there exists a line L in $\mathbb{R}^{n+2}$ satisfying the condition:

$$L \cap M = \{x_0\}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Let $f(z)$ be a holomorphic function on $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Prove that if the condition:

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad (z \neq 0)$$

is satisfied, then $f(z)$ is a constant function.