

平成 23 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

# 数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2011 Entrance Examination For Foreign Students  
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

## 数学 Mathematics

- ⊗ [1] から [5] までの全問を解答せよ. Answer all problems from [1] to [5].
- ⊗ 解答時間は 3 時間 である. The duration of the examination is three hours.
- ⊗ 問題は日本語および英語で書かれている. 解答は日本語・英語どちらで書いてもよい. The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する. It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

### [注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かぬこと. Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ. Write your name and applicant number in each answer sheet.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること. If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい. You may take home this problem sheet.

### [記号 (Notations)]

以下の問題で  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  はそれぞれ, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

In the problems, we denote the set of all real numbers by  $\mathbb{R}$ , and the set of all complex numbers by  $\mathbb{C}$ .

- 1**  $n \geq 2$  とし,  $V$  を  $n$  次元実ベクトル空間とする. このとき  $n-1$  次外積空間  $\wedge^{n-1}V$  の任意の元  $v$  は  $V$  の適当な元  $v_1, \dots, v_{n-1}$  を用いて

$$v = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$$

と書けることを証明せよ.

- 2**  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  は無理数であることを証明せよ.

- 3**  $p$  を素数とすると, アーベル群  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^2$  の元で位数  $p^2$  のものの個数を求めよ.

- 4**  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  とする. 写像  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$  を

$$f(x, y, z) = (x^4, y^4, z^4, xy, yz, zx)$$

で定める. このとき次の問いに答えよ (説明も付すこと).

- (1)  $f$  ははめ込みか.
  - (2)  $f$  は埋め込みか.
- 5** 次の積分の値を求めよ:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

- 1** Let  $V$  be an  $n$ -dimensional real vector space with  $n \geq 2$ . Prove that every element  $v \in \wedge^{n-1}V$  can be written as

$$v = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$$

with some elements  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ . Here  $\wedge^{n-1}V$  denotes the  $(n-1)$ -st exterior product of  $V$ .

- 2** Prove that  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  is an irrational number.

- 3** Let  $p$  be a prime number. Find the number of elements of the abelian group  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^2$  of order  $p^2$ .

- 4** Set  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , and define a map  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$  by  $f(x, y, z) = (x^4, y^4, z^4, xy, yz, zx)$ . Answer the following questions (with explanation).

- (1) Is  $f$  an immersion?
- (2) Is  $f$  an embedding?

- 5** Compute the following integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$