平成 22 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

# 数学系 外国人留学生入学試験問題

2010 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

# 数学

# Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ． Answer all problems from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語・英語どちらで書いてもよい． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

## [注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かぬこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙·計算用紙のすべてに，受験番号·氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

## [記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x$ を実数とするとき，次の行列の階数を求めよ：

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分の値を求めよ：

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{C}[x,y]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環とし，$I$ を 3 つの多項式

$$x^2+4x+4, \quad xy+x+2y+2, \quad y^3+3y^2+3y+1$$

によって生成される $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアルとする．剰余環 $\mathbb{C}[x,y]/I$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $C^\infty$ 級の関数で $f(0,0)=0$ を満たすとする．$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\neq 0$ であるとき，$(0,0)$ の 2 つの開近傍 $U,V\subset\mathbb{R}^2$ と微分同相写像 $\varphi:U\to V$ であって，

$$f\circ\varphi(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=0$$

を満たすものが存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の等式を示せ：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e}.$$

$\boxed{1}$ Let $x$ be a real number. Compute the rank of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Compute the following integral:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

$\boxed{3}$ Let $\mathbb{C}[x,y]$ be the polynomial ring with two variables over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers and let $I$ be the ideal of $\mathbb{C}[x,y]$ generated by the three polynomials

$$x^2+4x+4, \quad xy+x+2y+2, \quad \text{and} \quad y^3+3y^2+3y+1.$$

Compute the dimension of the quotient ring $\mathbb{C}[x,y]/I$ as a vector space over $\mathbb{C}$.

$\boxed{4}$ Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a $C^\infty$ function with $f(0,0)=0$. Suppose $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. Then verify that there exist two open neighbourhoods $U, V \subset \mathbb{R}^2$ of $(0,0)$ and a diffeomorphism $\varphi : U \to V$ such that

$$f \circ \varphi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0.$$

$\boxed{5}$ Show the following equality:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$