平成 25 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる：分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

⊗　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 下書用紙のすべてに, 受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書用紙をその下に揃え, 選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ 体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{N},\sqrt{i+1})$ が $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大体となるような最小の正の整数 N と，そのときの Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ．ただし $i=\sqrt{-1}$ とする．

$\boxed{2}$ $A=\mathbb{C}[x,y]$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環とし，A の部分環 B を

$$B=\{f(x,y)\in A \mid f(-x,-y)=f(x,y)\}$$

と定める．このとき，次の問 (1), (2) に答えよ．

(1) A の極大イデアル $m_0=(x,y)$, $m_1=(x-1,y)$ に対し，$n_0=m_0\cap B$, $n_1=m_1\cap B$ とおく．このとき，剰余環 A/n_0A, A/n_1A の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

(2) A が B 加群として自由加群でないことを証明せよ．

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^3$ 内の直線

$$\begin{aligned}\ell_1&=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_2=x_3=0\right\},\\ \ell_2&=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=x_3=0\right\},\\ \ell_3&=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=x_2=1\right\}\end{aligned}$$

を考える．

(1) $X=\mathbb{R}^3\backslash(\ell_1\cup\ell_2)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $Y=\mathbb{R}^3\backslash(\ell_1\cup\ell_2\cup\ell_3)$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{4}$ 境界のない 2 次元可微分多様体 M の上の滑らかなベクトル場 X_1,X_2 は M の各点で一次独立であり，$[X_1,X_2]=X_1$ を満たすものとする．

(1) θ_1,θ_2 は M 上の一次微分形式で，各点において X_1,X_2 の双対基底となっているものとする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$d\theta_1+\theta_1\wedge\theta_2=0.$$

(2) M は向き付け可能で非コンパクトであることを示せ．

$\boxed{5}$ 閉区間 $[0,1]$ 上の任意の Lebesgue 可積分函数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ 実 Banach 空間 $L^1([0,1])$ から実 Banach 空間 $L^1(\mathbb{R})$ への作用素 T を次で定める：

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

ここで K は $\mathbb{R}\times[0,1]$ 上の実数値連続函数で,

$$\rho(x) = \sup_{y\in[0,1]}|K(x,y)|$$

と定めたとき $\rho\in L^1(\mathbb{R})$ を満たしているとする．このとき，T はコンパクト作用素であることを示せ.

$\boxed{7}$ 複素数値函数 $u(t,x)$ は，$(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$ においては連続で

$$u(t,x) = u(t,x+2\pi)$$

を満たし，$(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ においては C^2 級で

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + 2i\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

を満たすとする．ただし $i=\sqrt{-1}$ とする． 各整数 k に対して

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)e^{-ikx}dx$$

とおく． このとき，u が $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で有界になるための必要十分条件と，そのときの $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|u(t,x)|^2dx$ を $\{\hat{u}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ で表せ.

$\boxed{8}$ 次のプログラムについて，以下の問に答えよ．ただしプログラム中，n は正の整数定数，N, K, および R_i $(0 \le i \le n+2)$ はプログラム変数であり，$\langle$ プログラム変数 $\rangle$:= $\langle$ 式 $\rangle$ はプログラム変数への代入を表す．

$$
\begin{array}{l}
R_0 := 1; R_1 := 2; R_2 := 1; N := 2; K := 0; \\
\textbf{while } N \le n+1 \textbf{ do} \\
\quad (\textbf{if } K = 0 \\
\quad\ \ \textbf{then } R_{N+1} := 1; K := N; N := N+1 \\
\quad\ \ \textbf{else } R_K := R_K + R_{K-1}; K := K-1)
\end{array}
$$

このプログラム中の **while** ループに関するループ不変条件 Θ のうち，以下の条件

$$\Theta \wedge (n+1 < N) \wedge (K = N-1) \quad \Longrightarrow \quad \bigwedge_{i=0}^{n+1} (R_i = {}_{n+1}\mathrm{C}_i)$$

を満たすものを与えよ．ただし，Θ がループ不変条件であることを示すこと．（ここで ${}_m\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す.）