平成 24 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

⊗　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 下書用紙のすべてに, 受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書用紙をその下に揃え, 選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, $\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ と書く.

$\boxed{1}$ 1 以上の整数 a に対して $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3+a\sqrt{5}})$ が $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大体となるものを求め, そのような a に対して Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{2}$ (1) n は 2 以上の整数とし, ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする. $\mathbb{C}[[x,y]]$ は変数 x, y についての $\mathbb{C}$ 上の二変数形式的ベキ級数環とする.

$$R = \left\{ f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]] \;\middle|\; f(\zeta_n x, \zeta_n^{-1} y) = f(x,y) \right\}$$

とおく. 環 R は $\mathbb{C}$ 上の二変数形式的ベキ級数環に $\mathbb{C}$ 代数として同型ではないことを示せ.

(2) 環

$$S = \left\{ f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]] \;\middle|\; f(\zeta_n x, \zeta_n y) = f(x,y) \right\}$$

は $n > 2$ のとき, $\mathbb{C}$ 代数として R に同型ではないことを示せ.

$\boxed{3}$

$$D(1) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1| \le 1, \quad |z_2| = |z_3| = 1\},$$
$$D(2) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_2| \le 1, \quad |z_1| = |z_3| = 1\}$$

とする. $\mathbb{C}^3$ の中の和集合

$$Z = D(1) \cup D(2)$$

の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

$\boxed{4}$ $S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0,1]\}$ とし, その上に微分 1 形式 dt を考える. Σ をコンパクトで境界のない向きのついた滑らかな 2 次元多様体とする. $F : S^1 \to \Sigma$ を滑らかな埋め込みとする. $\Sigma \setminus F(S^1) = \{x \in \Sigma \mid x \notin F(S^1)\}$ は連結と仮定する.

(1) Σ 上の滑らかな微分 1 形式 θ_1 で

$$d\theta_1 = 0, \quad \int_{S^1} F^*\theta_1 = 1$$

なるものが存在することを示せ.

(2) Σ 上の滑らかな微分 1 形式 θ_2 で

$$d\theta_2 = 0, \quad F^*\theta_2 = dt$$

なるものが存在することを示せ.

$\boxed{5}$ 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mu(X) = 1$ を満たすと仮定する. また, f を X 上の正値 μ–可測函数とし,

$$\int_X f d\mu + \int_X |\log f| d\mu < \infty$$

を仮定する. このとき,

$$\lim_{p \to 0+} \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} = \exp\left(\int_X \log f \, d\mu \right)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\lim_{p \to 0+}$ は $p > 0$ のとき $p \to 0$ とした極限を表すものとする.

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}$ 上の複素数値可積分函数からなる函数空間 $L^1(\mathbb{R})$ における線形作用素 T を

$$D(T) = \left\{ x(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \frac{dx}{dt} \in L^1(\mathbb{R}) \right\},$$

$$Tx = \frac{dx}{dt}, \qquad x \in D(T)$$

と定める. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ であれば, 作用素 $(\lambda - T)$ は連続な逆作用素を持つことを示せ.

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ であれば, 作用素 $(\lambda - T)$ は連続な逆作用素を持たないことを示せ.

$\boxed{7}$ C^∞ 函数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は, $\mathbb{R}^2$ 上で偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - u(t, x)$$

を満たし, $|x| > |t| + 1$ では $u(t, x) = 0$ とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = 0.$$

$\boxed{8}$ 項の集合 B を, 以下の条件を満たす最小の集合と定義する.

(a) $\mathsf{Leaf} \in B$

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$, $l, r \in B$ かつ $x \leq y$ ならば $\mathsf{Node}(l, x, y, r) \in B$

任意の $t \in B$ について, 整数の部分集合 $\mathcal{M}(t)$ を以下のように帰納的に定める. (ただし, $[x, y]$ は集合 $\{i \in \mathbb{Z} \mid x \leq i \leq y\}$ を表す.)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathsf{Leaf}) =&\ \emptyset \\
\mathcal{M}(\mathsf{Node}(l, x, y, r)) =&\ \mathcal{M}(l) \cup [x, y] \cup \mathcal{M}(r)
\end{aligned}
$$

また, B の部分集合 D を以下のように定義する.

$$
t \in D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} t\text{ の任意の部分項 }\mathsf{Node}(l, x, y, r)\text{ について, (i) 任意の }x' \in \mathcal{M}(l) \\ \text{について }x' < x\text{, かつ (ii) 任意の }y' \in \mathcal{M}(r)\text{ について }y < y' \end{array}
$$

いま関数 $G_1 : \mathbb{Z} \times B \to B$, $G_2 : \mathbb{Z} \times B \to B$, $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times B \to B$ をそれぞれ以下のように帰納的に定める.

$$
\begin{aligned}
G_1(m, \mathsf{Leaf}) =&\ \mathsf{Leaf} \\
G_1(m, \mathsf{Node}(l, x, y, r)) =&\ \begin{cases} G_1(m, l) & (m \leq x\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(l, x, m-1, \mathsf{Leaf}) & (x < m \leq y\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(l, x, y, G_1(m, r)) & (y < m\text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_2(k, \mathsf{Leaf}) =&\ \mathsf{Leaf} \\
G_2(k, \mathsf{Node}(l, x, y, r)) =&\ \begin{cases} G_2(k, r) & (y \leq k\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(\mathsf{Leaf}, k+1, y, r) & (x \leq k < y\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(G_2(k, l), x, y, r) & (k < x\text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(m, k, \mathsf{Leaf}) =&\ \mathsf{Node}(\mathsf{Leaf}, m, k, \mathsf{Leaf}) \\
F(m, k, \mathsf{Node}(l, x, y, r)) =&\ \begin{cases} \mathsf{Node}(F(m, k, l), x, y, r) & (k < x\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(l, x, y, F(m, k, r)) & (y < m\text{ のとき}) \\ \mathsf{Node}(G_1(m, l), \min(m, x), & \\ \qquad\qquad \max(k, y), G_2(k, r)) & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

このとき, 任意の $m, k \in \mathbb{Z}$ および $t \in D$ について,

$$
m \leq k\text{ ならば }F(m, k, t) \in D\text{ かつ }\mathcal{M}(F(m, k, t)) = \mathcal{M}(t) \cup [m, k]
$$

が成り立つことを証明せよ.