平成 24 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 3 時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 下書用紙のすべてに, 受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, $\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ と書く.

$\boxed{1}$ A, B は複素数係数の n 行 n 列行列, $f(X)$ は複素数係数の多項式とする.

$$Af(B) = B$$

が成り立っているとする. 次を証明せよ.

(1) $f(B)$ が正則ならば A と B は可換である.

(2) $f(B)$ が正則でなければ $f(0) = 0$ である.

$\boxed{2}$ $p \geq 3$ を奇素数, n を自然数とする. 行列の乗法を演算とする群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ ad = 1 \right\}$$

には位数 p^{2n-1} の部分群がただ一つ存在することを示せ.

$\boxed{3}$ $f(x)$ は $[0, \infty)$ 上の非負実数値連続函数で単調非増加であり, かつ $f(x)/\sqrt{x}$ は $[0, \infty)$ 上広義積分をもつと仮定する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} f(x) = 0$ を示せ.

(2) 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_{\varepsilon x}^{x} \frac{f(y)}{\sqrt{x - y}}\, dy = 0$ を示せ.

$\boxed{4}$ n を正の整数とし, $\mathbb{T}^n$ を $\mathbb{C}^n$ に標準的に埋めこまれた n 次元トーラス, すなわち,

$$\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$$

とする. $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ を, 連続写像ですべての $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n$ について

$$f(z_1, \ldots, z_n) = f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

をみたすものとする. ($\bar{z}$ は $z \in \mathbb{C}$ の複素共役を表わす)

(1) S^1 を単位円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, 写像 $\gamma : S^1 \to \mathbb{T}^n$ を $\gamma(z) = (z, 1, \ldots, 1)$ で定める. このとき, $f \circ \gamma$ は定値写像とホモトピックであることを示せ.

(2) f が誘導する基本群の間の写像 $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^n)$ は零写像であることを示せ.

(3) f は定値写像とホモトピックであることを示せ.

(注) 位相空間 X, Y とその間の連続写像 $F : X \to Y$ について, F が定値写像とホモトピックであるとは, 連続写像 $H : X \times [0, 1] \to Y$ と $q_* \in Y$ で, すべての $p \in X$ について $H(p, 0) = q_*$ と $H(p, 1) = F(p)$ が成り立つものが存在することをいう.

$\boxed{5}$ 函数 f を

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{x - z}\, dx$$

と定める. このとき, $f(z)$ は $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R}\}$ で正則であることを示せ. また, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(f(i\varepsilon) - f(-i\varepsilon)\right)$$

を求めよ.