平成 22 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 3 時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体（0 は含まない）, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A^5 = 2E_n$ を満たす n 次正方行列 A で成分がすべて有理数のものが存在するための，n に関する必要十分条件を求めよ．(ただし，E_n は n 次単位行列である．)

$\boxed{\mathbf{2}}$ f を，点 0 を含む開区間で C^1 級の函数とするとき，極限

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^h f(x)\,dx - hf(0) \right\}$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(\mathbb{Z}/\,525\mathbb{Z})^\times$ の元で位数が 4 であるものの個数を求めよ．ただし，$(\mathbb{Z}/\,525\mathbb{Z})^\times$ は可換環 $\mathbb{Z}/\,525\mathbb{Z}$ の可逆な元全体の作る群である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ X を位相空間，$e \in X$ とし，

$$\Omega = \{\alpha : [0,\, 1] \to X \mid \alpha \text{ は連続写像},\ \alpha(0) = \alpha(1) = e\}$$

とする．Ω の同値関係 $\simeq$ を次で定義する．

$\alpha,\, \beta \in \Omega$ に対して，連続写像 $F:\ [0,\, 1] \times [0,\, 1] \to X$ で

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1), \\ F(t, 1) &= \beta(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1), \\ F(0, s) = F(1, s) &= e \quad (0 \leqq s \leqq 1) \end{aligned}$$

を満たすものが存在するとき，$\alpha \simeq \beta$ と定める．また，位相空間 X は，

$$\mu(x, e) = \mu(e, x) = x \quad (x \in X)$$

を満たす連続写像 $\mu : X \times X \to X$ をもつものとする．$\alpha,\ \beta \in \Omega$ に対して，Ω の元 $\alpha * \beta$ と $\alpha \sharp \beta$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(t) &= \begin{cases} \alpha(2t) & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ \beta(2t-1) & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{cases} \\ (\alpha \sharp \beta)(t) &= \mu(\alpha(t),\, \beta(t)) \quad (0 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

このとき，次の命題 (1), (2), (3) を示せ．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta' \in \Omega$ に対して $\alpha \simeq \beta,\, \alpha' \simeq \beta'$ ならば $\alpha \sharp \alpha' \simeq \beta \sharp \beta'$ である．

(2) $\alpha,\ \beta \in \Omega$ に対して $\alpha \sharp \beta \simeq \alpha * \beta$ である．

(3) $\alpha,\ \beta \in \Omega$ に対して $\alpha \sharp \beta \simeq \beta * \alpha$ である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - 1}{x(x^2+1)}\, dx$$