平成 21 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

⊗　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ K は虚２次体とする．すなわち，$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ で，d は正の有理数であるとする．このとき，$\mathbb{Q}$ の４次の巡回拡大体 L で K を含むものは存在しないことを示せ．ただし，$L/\mathbb{Q}$ が巡回拡大であるとは，$L/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であって，Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が巡回群となっていることをいう．

$\boxed{\mathbf{2}}$ p を奇素数とする．G を位数が p^3 の有限群で，単位元以外の各元の位数が p であるようなものとする．このとき，G は $\mathbb{C}$ 上の２次一般線型群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群と同型ではないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ D^2 を複素平面内の境界を含めた単位円板 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1\}$ とし，S^1 をその境界 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ とする．n を２以上の整数とし，

$$X_1 = X_2 = D^2 \times \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n-1\text{ 個}}$$

とおき，X_1 と X_2 の境界を

$$\partial X_1 = \partial X_2 = \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{ 個}}$$

と表わす．σ を n 次の置換とするとき，

$$f_\sigma(z_1,\ldots,z_n) = (z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})$$

によって写像

$$f_\sigma : \partial X_1 \to \partial X_2$$

を定める．X_1 と X_2 を，その境界の間の同相写像 f_σ で貼り合わせて得られる空間を X とする．以下の場合に X の整係数ホモロジー群を求めよ．

（１）$n=2$ で，σ が１と２の互換の場合

（２）$n=3$ で，σ が一般の置換の場合

$\boxed{\mathbf{4}}$ ３次元球面 S^3 を $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ と同一視する．S^3 から S^3 への C^∞ 写像 f を

$$f(z_1,z_2) = (z_1^2-|z_2|^2,\, z_1z_2+\overline{z_1}z_2)$$

で定義する．このとき f の臨界点を求めよ．

5 $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$I_t(f) = \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^2 dx$$

とする。このとき次の問に答えよ．

（１）$f' \in L^2(\mathbb{R})$ ならば極限値 $\lim_{t \to 0} I_t(f)$ が存在し，その値は $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\, dx$ に等しいことを示せ．

（２）もし $\sup_{t>0} I_t(f) < +\infty$ ならば $f' \in L^2(\mathbb{R})$ であることを示せ．

6 H を可分 Hilbert 空間として，その内積を (,) で表わす．H の完全正規直交系 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を取り，H 上の函数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |(x, \varphi_k)|^2$$

で定める．このとき，H 内の有界集合 A が相対コンパクトであることと，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が A 上で一様収束することが同値であることを示せ．

7 常に１以上の値を取る２つの実数値函数 $p \in C^1([0,1])$, $q \in C([0,1])$ に対し，実数値函数列 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(u_n \in C^2([0,1]))$ は

$$\begin{cases} -\{p(x)u_n'(x)\}' + q(x)u_n(x) = f_n(x), & x \in [0,1] \\ u_n'(0) = u_n'(1) = 0 \end{cases}$$

を満たし，$\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 \{f_n(x)\}^2 dx < +\infty$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\int_0^1 \{u_n'(x)\}^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \{u_n(x)\}^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \{f_n(x)\}^2 dx$$

が成り立つことを示し，$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ から $[0,1]$ 上で一様収束する部分列を選ぶことができることを示せ．

8 $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ を文字の集合，A^* を A に属する文字からなる有限長の文字列全体の集合とする．以下，空文字列（長さ０の文字列）を ε で表わし，二つの文字列 x, y を連結して得られる文字列を xy で表わす．E を定数記号，N を２引数の関数記号とし，T を以下の性質を満たす最小の集合とする．

(a) E は T の元である．

(b) l, r が T の元ならば、$N(l, r)$ は T の元である．

関数 $F : T \to A^*$ を以下のように帰納的に定義する．

$$F(t) = \begin{cases} \varepsilon & (t = E \text{ のとき}) \\ \mathtt{a}F(l)\mathtt{b}F(r) & (t = N(l,r) \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

（1）次のような性質

$$F(G(t_1, t_2)) = F(t_1)F(t_2)$$

を満たすような関数 $G : T \times T \to T$ を帰納的に定義し、その G が実際この性質を満たすことを示せ．

（2）文字列 x が含む $\mathtt{a}$ および $\mathtt{b}$ の数をそれぞれ $L(x)$ および $R(x)$ と書くとき，次のような性質

$$D(t) = \max\{L(x) - R(x) \mid x, y \in A^* \text{かつ } F(t) = xy\}$$

を満たすような関数 $D : T \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\mathbb{Z}_{\geq 0}$は非負整数の全体) を帰納的に定義し、その D が実際この性質を満たすことを示せ．