平成 21 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 3 時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 標数 0 の体 K 上の有限次元ベクトル空間 V の一次変換 T が,

$$T^3 = 1_V, \quad \mathrm{Tr}\,(T) = 0$$

を満たすとする．このとき，V の次元は 3 の倍数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ f, g を区間 $(0, \infty)$ 上で定義された連続かつ広義可積分な非負値函数とし，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} xg(x) = 0$$

を満たすとする．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^\infty f(x)g(nx)dx = 0$$

を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p は素数とする．方程式

$$x^2 + y^2 = 1$$

の解 $(x, y) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $p \equiv 1 \bmod 4$ のときの解の個数を求めよ．

(2) $p \equiv 3 \bmod 4$ のときの解の個数は $p + 1$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ f を n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 級写像とする．ただし $n \geq 1$．このとき S^n 上の点で，その点における f の微分の階数が $n-1$ 以下になるものが存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 上で零点を持たない整函数の列 $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ がある．もし $f_n(z)$ が $\mathbb{C}$ 上で多項式 $p(z)$ に広義一様収束するならば，$p(z)$ は定数であることを示せ．