平成 20 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

$\otimes$　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

$\otimes$　この８問題中, <u>３問題</u> を <u>２つ以上の分野群</u> から選択して解答せよ.

$\otimes$　解答時間は <u>４時間</u> である.

$\otimes$　参考書 · ノート類の持ち込みは <u>禁止</u> する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

1 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の素数 p が定める $\mathbb{Z}$ の素イデアル (p) による局所化

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \notin (p) \}$$

を考える．$\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{Z}_{(p)}[x]$ のイデアル $(ax+b)$, $(a, b \in \mathbb{Z}_{(p)}, a \neq 0)$ が極大イデアルであるための a, b に関する必要十分条件を求めよ.

2 tを不定元とし複素数体上の有理関数体 $K = \mathbb{C}(t)$ を考える． 複素数 $p, q \in \mathbb{C}$ をとり $L = \mathbb{C}(t^3 + pt + q)$ とおくとき，K/L は代数拡大であることを示し，さらに K/L の Galois 閉包（K を含む最小の L 上の Galois 拡大体）とその L 上の拡大次数を求めよ.

3 5 次元球面 $S^5 = \{(x_0, \cdots, x_5) \in \mathbb{R}^6 \mid x_0^2 + \cdots + x_5^2 = 1\}$ とその上の点 $a_0 = (1, 0, \cdots, 0), a_1 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$ を考える．$U_0 = S^5 \setminus \{a_0\}$, $U_1 = S^5 \setminus \{a_1\}$ とおく．位相空間 E と連続写像 $\pi\colon E \to S^5$ が次の条件を満たすとする.

(条件) 同相写像

$$\psi_0\colon \pi^{-1}(U_0) \to U_0 \times S^3, \quad \psi_1\colon \pi^{-1}(U_1) \to U_1 \times S^3$$

が存在し，

$$(\mathrm{P}r_1 \circ \psi_j)(u) = \pi(u)$$

が $j = 0, 1$, $u \in \pi^{-1}(U_j)$ に対して成立する．ここで，S^3 は 3 次元球面，$\mathrm{P}r_1\colon U_j \times S^3 \to U_j$ は第一成分への射影を表す.

次の問に答えよ.

(1) E はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) E の有理数係数のコホモロジー群を求めよ.

4 $S^n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ を n 次元球面とする．T_pS^n を点 $p \in S^n$ における S^n の接空間とし，

$$TS^n = \bigcup_{p \in S^n} T_pS^n$$

とおく．$M = \{(z_0, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^2 = 1\}$ が TS^n と微分同相であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f \in L^1(\mathbb{R})$ と正整数 n に対し $\mathbb{R}$ 上の函数 φ_n を

$$\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} f(y)dy$$

と定める．ただし，$y = x$ のときは，$\dfrac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} = 1$ と解釈する．このとき，函数列 $\{\varphi_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上で 0 に一様収束することを示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 実数 t に対してヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ作用素 U_t を

$$U_t f(x) = f(x-t), \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

と定める．S と T が $L^2(\mathbb{R})$ のコンパクト作用素ならば，

$$\lim_{t\to\infty} \|SU_tT\| = 0$$

となることを示せ．ここで作用素 A に対して $\|A\|$ は A の作用素ノルムとする．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 函数 $u\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ は C^2，函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は連続で，$u(x,t), f(x)$ はともに x について 2π 周期であり，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R})$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

を満たすとする．このとき，$u(x,t)$ は $t \to \infty$ で，ある函数へ，$x \in \mathbb{R}$ について一様に収束することを示し，その Fourier 展開を $f(x)$ と $u(x,0)$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ とする。任意の関数 $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ について順序関係 $\sqsubseteq$ を以下のように定義する。

$$f \sqsubseteq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}.(f(n) = \perp \text{ または } f(n) = g(n))$$

また、関数 $\mathrm{plus} \in \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ および汎関数 $\mathrm{cond} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to \mathbb{N}_\perp$, $F, F', G, G' \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{plus}(m, n) &= \begin{cases} \perp & (m = \perp \text{ または } n = \perp) \\ m + n & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\mathrm{cond}(n, m, f) &= \begin{cases} m & (n = 0) \\ f(n-1) & (n > 0) \end{cases} \\
F'(f)(n) &= \mathrm{plus}(f(n), \mathrm{plus}(n, 1)) \\
F(f)(n) &= \mathrm{cond}(n, 0, F'(f)) \\
G'(f)(n) &= \mathrm{plus}(f(n), \mathrm{plus}(n, \mathrm{plus}(n, 1))) \\
G(f)(n) &= \mathrm{cond}(n, 0, G'(f))
\end{aligned}$$

(1) F, G はそれぞれ順序関係 $\sqsubseteq$ に関する最小不動点を持つ。その理由を簡単に述べよ。

以下、汎関数 $J \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ が最小不動点を持つとき、その最小不動点を $\mathrm{fix}(J)$ で表すこととする。

(2) 任意の $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ について、汎関数 $H_g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ を

$$H_g(f)(n) = \mathrm{plus}(g(n), f(n))$$

と定める。このとき、

$$H_g \circ F = G \circ H_g \quad \text{ならば} \quad H_g(\mathrm{fix}(F)) = \mathrm{fix}(G)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) (2) の結果を用いて、以下の等式

$$H_{\mathrm{fix}(K)}(\mathrm{fix}(F)) = \mathrm{fix}(G)$$

を満たす汎関数 $K \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ が存在することを証明せよ。