平成 20 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗　$\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

⊗　解答時間は 3時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

1 V と W を複素数体上の有限次元ベクトル空間とし，$f : V \to V, g : W \to W$ をそれぞれ線型変換とする．さらに，f と g は同じ固有値を持たないとする．線型写像 $\varphi : V \to W$ が，条件 $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ を満たしているとき，$\varphi = 0$ となることを示せ.

2 f と g を $\mathbb{R}$ 上定義された一様連続な実数値函数とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) 函数 $\dfrac{f(x)}{1+|x|}$ は $\mathbb{R}$ 上有界であることを示せ.

(2) 函数 $\dfrac{f(x)g(x)}{1+|x|}$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

3 $p,\ \ell$ を素数とする．次数が ℓ の $\mathbb{F}_p$ 上のモニックな一変数既約多項式の数を求めよ．ただし，$\mathbb{F}_p$ は p 個の元からなる体である.

4 $S^n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ を n 次元球面とする.
次の問に答えよ.

(1) $n \geq 1$ とし，$f : S^n \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．このとき，$f(x) = f(-x)$ を満たす $x \in S^n$ が存在することを示せ.

(2) $n \geq 2$ とし，$f : S^n \to S^1$ を連続写像とする．このとき，$f(x) = f(-x)$ を満たす $x \in S^n$ が存在することを示せ.

5 $f(z)$ は領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ で定義された正則函数で，

$$\int_D |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty$$

を満たすとする．このとき，$z = 0$ は $f(z)$ の除去可能特異点であることを示せ.