平成19年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

⊗　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ R を単項イデアル整域とし, K をその商体とする. I を多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルとするとき, 次の (1), (2) の性質を共に満たすような $R[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル J が唯一つ存在することを示せ.

(1) J で生成される $K[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルは I に等しい.

(2) $R[x_1, \ldots, x_n]/J$ は R 加群として平坦.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 多項式 $x^4 + 9$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とするとき, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

の直積 $S^2 \times S^2$ の部分集合

$$M = \{(p, q) \in S^2 \times S^2 \mid p \neq q,\ p \neq -q\}$$

を考える.

M の $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジー群を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 3次元球面

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

を考える. $t \in \mathbb{R}$ に対して, 可微分写像 $T_t : S^3 \to S^3$ を

$$T_t(z_1, z_2) = (e^{2\pi\sqrt{-1}t} z_1, e^{2\pi\sqrt{-1}t} z_2)$$

で定義する.

$(z_1, z_2) \in S^3$ で

$$X(z_1, z_2) = \left.\frac{d}{dt} T_t(z_1, z_2)\right|_{t=0}$$

である, S^3 上のベクトル場を X とする.

S^3 上の 1 次微分形式 u で

$$(*) \begin{cases} u(X) = 1, \\ T_t^* u = u \quad (\text{すべての実数 } t \text{ に対して}) \end{cases}$$

をみたすものを考える.

(1) 等式

$$(du)(X, Y) = 0$$

が任意の S^3 上のベクトル場 Y に対して成り立つことを示せ.

(2) 積分

$$\int_{S^3} u \wedge du$$

の値は $(*)$ をみたす u によらずに定まることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $L^1(\mathbb{R})$ の列で，それぞれ $L^1(\mathbb{R})$ の元 f, g, h にほとんどいたるところ収束しているとする．さらに $f_n \leq g_n \leq h_n$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx$$

が成り立っているとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$$

が成立することを示せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ θ を $0 < \theta < \pi$ をみたす実数とし, T をヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ の有界線型作用素

$$Tf(x) = e^{i\theta} \int_0^x f(t)dt, \quad f \in L^2(0,1)$$

とする. f が $L^2(0,1)$ の閉単位球を動くときの $\langle (T+T^*)f, f\rangle$ の上限を求めよ. ここで, $\langle f, g\rangle$ は f と g の内積

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

とし, T^* は T の共役作用素とする.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f \in L^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty)$ とし, $\mathrm{Re}\, z > 1/2$, $\mathrm{Re}\, \zeta > 0$ に対して

$$F_z(\zeta) = \int_0^\infty e^{-x\zeta} \int_0^x t^{z-1} f(x-t)dtdx$$

と定める. 次の極限が存在することを示せ:

$$\lim_{r\to+0} r^{2\mathrm{Re} z - 1} \int_{-\infty}^{\infty} |F_z(r+is)|^2 ds.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ M 種類 $(M \geq 1)$ の異なる色の玉が色ごとにそれぞれ $a_1, a_2, \cdots, a_M$ 個あるとする．ただし，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_M \geq 1$ とし，N を玉の総数，すなわち $N = \sum_{i=1}^{M} a_i$ とする．

K を $1 \leq K \leq M$ なる定数とする．上記の玉の集まりから相異なる色の玉を K 個取り除く作業を，玉の色が K 種類未満になるまで繰り返したとき，最終的に残る玉の個数が最小になる場合の，その最小値を計算するプログラムを以下に示す．(ただし，プログラム中，$:=$ は変数への代入を，$\wedge$ は論理積を表す．)

```
r := N;
while a_K > 0 do
  i := K;
  while i > 0 do
    a_i := a_i − 1; r := r − 1; j := i;
    while j < M ∧ a_j < a_{j+1} do
      t := a_j; a_j := a_{j+1}; a_{j+1} := t; j := j + 1
    done;
    i := i − 1
  done
done
```

このプログラムについて以下の問いに答えよ．

(1) 最も外側の **while** ループがみたすループ不変条件を与え，それが実際不変条件であることを示せ．また，このループの 1 回の実行が，玉の集まりに対するどのような操作に対応するか簡潔に述べよ．

(2) プログラムの実行が終了したときの変数 r の値が，最終的に残る玉の個数のうち最小のものを与えることを証明せよ．