平成 19 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 3 時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n,\ k$ を自然数とし，$n \geq k$ とする．q 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元数ベクトル空間の k 次元部分ベクトル空間の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ x を実変数とする函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$$

について次の問に答えよ．

(1) この級数の和を $S(x)$ とするとき，$x \neq 0$ に対して

$$|S(x)| \geq \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}|x|$$

が成り立つことを示せ．

(2) この級数は，$\mathbb{R}$ 上では一様収束しないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ のイデアルで，4 を含むものを全て求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次元球面から 2 次元トーラスへの可微分写像の写像度は 0 であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\mathbb{R}$ 上の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)x(x-1)(x-2), \quad x(0) = a$$

の解 $x(t)$ について，$\lim_{t\to\infty} x(t)$ が存在すれば、それを求めよ．